DAS POTENTIAL GEWISSER HOMOGENER ROTATIONSOVALOIDE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VORGELEGT

VON

ELISABETH KUMM
AUS MARIENBURG (WESTPREUSSEN).

HALLE (SAALE)
BUCHDRUCKEREI HOHMANN
1922

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. GUTZMER.
Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1922.

Dem Andenken meines Vaters!

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitendes 1

Allgemeiner Ansatz 1

I. Abschnitt: Das Potential von Ovaloiden, die durch Inversion aus Rotationsellipsoiden entstehen, wenn das Inversionszentrum ein äußerer Achsenpunkt ist 3

§ 1. Das Grundellipsoid ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid 4

§ 2. Das Grundellipsoid ist ein verlängertes Rotationsellipsoid 9

II. Abschnitt: Das Potential von Ovaloiden, die durch Inversion aus Rotationshyperboloiden entstehen 26

§ 1. Das Grundhyperboloid ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid 26

§ 2. Das Grundhyperboloid ist ein einschaliges Rotationshyperboloid; das Inversionszentrum liegt auf der Rotationsachse 38

Im Text bezeichnen folgende Abkürzungen:

Abh. I: Wangerin, „Über das Potential gewisser Ovaloide". Nova Acta, Abhandl. der Kaiserl. Leopold.-Carolin. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 100 Nr. 1. 1915.

Abh. II: Dasselbe. Abhandlung II. Bd. 102 Nr. 3. 1917.

Bd. I: Wangerin, „Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen". Sammlung Schubert 58. Bd. I. 1909.

Bd. II: Dasselbe 59. Bd. II. 1921.

Einleitendes.

In seinen beiden Abhandlungen: „Über das Potential gewisser Ovaloide“ (1915 und 1917) untersucht ***A. Wangerin*** das Newtonsche Potential solcher Ovaloide, die aus Rotationsellipsoiden durch Transformation mittels reziproker Radien von einem *inneren* Achsenpunkte hervorgehen. In der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen ausgedehnt auf den Fall eines *äußeren* Achsenpunktes; ferner auf Ovaloide, die aus Rotationshyperboloiden durch Inversion von einem *beliebigen* Achsenpunkte aus entstehen. Dabei wurde die Methode der Abh. II benutzt. Die Resultate sind im wesentlichen dieselben wie bei *Wangerin*. Sie weichen in drei Fällen, die auf Hilfsflächen führen, darin ab, daß nur bestimmte Teile der Hilfsflächen in Frage kommen; ferner, daß einzelne der dort auftretenden Punkte hier fortfallen.

Allgemeiner Ansatz.

Da wir es im folgenden mit Rotationsovaloiden zu tun haben, so muß das Transformationszentrum auf der Rotationsachse der Ellipsoide bezw. Hyperboloide liegen. Wir wählen stets, wenn es nicht ausdrücklich anders hervorgehoben wird, das Transformationszentrum O auf der negativen Y-Achse, so daß der Mittelpunkt M der gegebenen Ausgangsfläche in bezug auf O die Koordinaten $0,\ y_0,\ 0$ besitze; d. h. y_0 ist der Abstand des Mittelpunktes der Ausgangsfläche vom Transformationszentrum und stets positiv.[1]) — Aus der Gleichung der Ausgangsfläche entsteht mittels der Transformationsgleichungen

$$\text{(I)}\quad X = \frac{R^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};\quad Y = \frac{R^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};\quad Z = \frac{R^2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$ [2])

[1]) Vgl. Fig. 1.

[2]) Bd. II S. 147/48.

die Gleichung der Begrenzungsfläche des Ovaloids in rechtwinkligen Koordinaten. Dabei ist der Anfangspunkt des x_1- y_1- z_1-Systems zugleich der Mittelpunkt der Transformationskugel mit dem Radius R. Statt der rechtwinkligen führen wir Polarkoordinaten ein mit O als Pol und y_1 als Polarachse. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\text{(II)} \quad x_1 = r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1\,; \quad y_1 = r_1 \cos\vartheta_1\,; \quad z_1 = r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1.$$

Sind r_1, ϑ_1, φ_1 die Polarkoordinaten eines Massenpunktes des Ovaloids, so erhalten wir mittels obiger Beziehungen aus der Gleichung des Ovaloids den Wert des Radiusvektors r_1 als Funktion von ϑ_1. Die Masse des gegebenen Ovaloids nehmen wir von konstanter Dichtigkeit eins an; dann ist sein Potential durch die Formel

$$V = \int d\varphi_1 \int \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \int \frac{r_1^2 \, dr_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\Gamma}}$$

gegeben, wenn

$$\cos\Gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

gesetzt ist und r, ϑ, φ die Polarkoordinaten des Aufpunktes P sind. Ist nun $r > r_1$, d. h. liegt P so, daß sein Abstand vom Pol größer ist als der größte Abstand eines Flächenpunktes des Ovaloids, so läßt sich der Faktor $\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\Gamma}} = \dfrac{1}{E}$ in eine Reihe entwickeln; nämlich

$$\text{(III)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\Gamma) = \frac{1}{E}.$$

Durch Einführung dieser für $r > r_1$ konvergenten Reihe in V geht das dreifache Integral in eine Summe von Integralen über. Die Grenzen des dreifachen Integrals sind für φ_1 0 und 2π, während die für ϑ_1 und r_1 von Fall zu Fall zu untersuchen sind. Da aber r_1 von φ_1 unabhängig ist, so kann die Integration nach φ_1 ausgeführt werden. Beachten wir noch die bekannte Formel[1])

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^{2\pi} P_n(\cos\Gamma) \, d\varphi_1 = 2\pi \, P_n(\cos\vartheta) \cdot P_n(\cos\vartheta_1),$$

[1]) Bd. II S. 71 (15a).

so wird

$$(V) \qquad V = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \int P_n(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \int r_1^{n+2} \, dr_1 .$$

Ferner bestimmt sich die Masse des Rotationsovaloids mit Hilfe der Formel

$$(VI) \qquad M = \int d\varphi_1 \int \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \int r_1^2 \, dr_1 .$$

I. Abschnitt.

Das Potential von Ovaloiden, die durch Inversion aus Rotationsellipsoiden entstehen, wenn das Inversionszentrum ein äusserer Achsenpunkt ist.

Die Halbachsen des gegebenen Rotationsellipsoids seien a und b, wobei b in die Richtung der Y-Achse fällt, d. h. Rotationsachse ist. Da das Inversionszentrum ein äußerer Achsenpunkt sein soll, so ist im folgenden stets $y_0 > b$. Die Gleichung des gegebenen Rotationsellipsoids

$$(1) \qquad \frac{(Y-y_0)^2}{b^2} + \frac{X^2+Z^2}{a^2} = 1$$

in bezug auf das Transformationszentrum als Koordinatenanfangspunkt geht durch Inversion in die Gleichung des Ovaloids

$$(2) \qquad \left[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{R^2 y_0 y_1}{y_0^2 - b^2}\right]^2 = \frac{b^2 R^4}{y_0^2 - b^2}\left[\frac{y_1^2}{y_0^2 - b^2} - \frac{x_1^2 + z_1^2}{a^2}\right]$$

über. Diese Gleichungen (1) und (2) gelten allgemein für beide Arten von Rotationsellipsoiden bezw. für die daraus entstehenden Ovaloidflächen. Wir haben (1) als Gleichung des abgeplatteten Rotationsellipsoids, wenn $b < a$, und als Gleichung des verlängerten, wenn $b > a$ ist.

§ 1. Das Grundellipsoid ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Fig. 1).

Für das abgeplattete Rotationsellipsoid ($b < a$) erhalten wir mittels der Gleichungen (II) aus (2) die Gleichung des Ovaloids in Polarkoordinaten

$$r_1 = C\left[\gamma \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}\right],$$

wenn wir

$$C = \frac{b^2 R}{a\sqrt{y_0^2 - b^2}}; \quad \gamma = \frac{a\, y_0}{b\sqrt{y_0^2 - b^2}}; \quad \beta^2 = \frac{y_0^2 + (a^2 - b^2)}{y_0^2 - b^2}$$

setzen. Es ist also

$$\beta^2 > 1 \quad \text{und} \quad \gamma^2 = \beta^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \text{ d. h. } \gamma^2 > \beta^2.$$

Ist Θ_1 der Wert von ϑ_1, für den die in r_1 auftretende Quadratwurzel verschwindet, so trifft jeder Radiusvektor die Begrenzungsfläche innerhalb des Winkelraumes $(0, \Theta_1)$ in zwei Punkten, deren Radienvektoren mit $\bar{r}_1$ bezw. $\bar{\varrho}_1$ bezeichnet sein mögen. Um alle Punkte des Ovaloids zu erhalten, müssen wir somit φ_1 von 0 bis 2π, ϑ_1 von 0 bis Θ_1 und r_1 von $\bar{\varrho}_1$ bis $\bar{r}_1$ variieren; dabei ist

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{r}_1 = C\left[\gamma \cos \vartheta_1 + \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}\right]; \\ \bar{\varrho}_1 = C\left[\gamma \cos \vartheta_1 - \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}\right]. \end{cases}$$

Für $\vartheta_1 = \Theta_1$ werden die beiden Radienvektoren einander gleich, d. h.

$$\Theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{y_0^2 - b^2}}{\sqrt{y_0^2 + (a^2 - b^2)}}\right).$$

Es gilt nur das positive Zeichen des Argumentes, da Θ_1 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt.

Das Potential des homogen mit Masse erfüllten Ovaloids ist durch die Formel (V) allgemein gegeben. Setzen wir darin die Grenzen für ϑ_1 und r_1 ein und führen die Integration nach r_1 aus, so erhalten wir, wenn wir noch für $\bar{r}_1$ und $\bar{\varrho}_1$ die durch die Gleichungen (3) gegebenen Werte einsetzen, den Ausdruck

$$(4) \qquad V = 2\pi C^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} J_n.$$

Darin ist

$$J_n = \frac{1}{n+3} \int_0^{\Theta_1} [(\gamma \cos \vartheta_1 + \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1})^{n+3} - (\gamma \cos \vartheta_1 - \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1})^{n+3}] \, P_n (\cos \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1.$$

Setzen wir $x = \cos \vartheta_1$, so wird

$$J_n = \frac{1}{n+3} \int_{\frac{1}{\beta}}^{1} [(\gamma x + \sqrt{\beta^2 x^2 - 1})^{n+3} - (\gamma x - \sqrt{\beta^2 x^2 - 1})^{n+3}] \, P_n (x) \, dx.$$

Auf dieses Integral können wir jetzt dieselbe Methode zur Umformung, wie sie für J_n in Abh. II S. 370/74 durchgeführt ist, und, da $\gamma^2 > \beta^2$ ist, auch die weitere Reduktion S. 374/75 anwenden. Wir erhalten danach:

$$(5) \quad J_n = \frac{2}{3} \int_0^{\Theta_1} \cos^{n+2} \vartheta_1 \, P_n (\cos \vartheta_2) \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}^{\,n} [3 f (\cos \vartheta_1) + 2 n f_1 (\cos \vartheta_1)] \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1,$$

wenn gesetzt ist:

$$f (\cos \vartheta_1) = [\gamma^2 - \beta^2 + 2 \cos^2 \vartheta_1 - 1] \cdot \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1};$$
$$f_1 (\cos \vartheta_1) = \sqrt{\beta^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}^{\,3}$$

$$(6) \quad \cos \vartheta_2 = \frac{\gamma \cos \vartheta_1}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}}; \quad \sin \vartheta_2 = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \cdot \sin \vartheta_1}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}}.$$

ϑ_2 ist ein reeller Winkel zwischen 0 und arccos $\left(\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + (a^2 - b^2)}}\right)$.

Durch Einführung von J_n gemäß (5) in (4) und unter Benutzung der Formel (IV) wird das Potential:

$$V = \frac{2}{3} C^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} \cos^{n+2} \vartheta_1 \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}^{\,n} \cdot P_n (\cos \Gamma_1) [3 f (\cos \vartheta_1) + 2 n f_1 (\cos \vartheta_1)] \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1.$$

$\cos \Gamma_1$ geht aus $\cos \Gamma$ (S. 2) hervor, indem man ϑ_1 durch ϑ_2 ersetzt:

$$(6\,a) \quad \cos \Gamma_1 = \frac{\cos \vartheta \cdot \gamma \cdot \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \cdot \sin \vartheta_1 \cos (\varphi - \varphi_1)}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1}}.$$

In obigem Ausdruck für das Potential kann man die Summe der Integrale durch das Integral der Summe ersetzen. Lösen wir

zugleich die Klammer unter dem Integral auf, so erhalten wir das Potential V als Summe zweier Ausdrücke, nämlich

$$(7)\quad \begin{cases} V = 2\,C^3 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} \cos^2\vartheta_1\, f(\cos\vartheta_1)\, S \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \\ \quad + \dfrac{4}{3}\, C^3 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} \cos^2\vartheta_1\, f_1(\cos\vartheta_1)\, S' \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1. \end{cases}$$

Hierin bedeuten S und S' folgende Ausdrücke:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2\vartheta_1}^{\,n} \cos^n\vartheta_1\, P_n(\cos\Gamma_1)}{r^{n+1}}$$

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, C^n \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \sin^2\vartheta_1}^{\,n} \cos^n\vartheta_1\, P_n(\cos\Gamma_1)}{r^{n+1}} = C\,\frac{\partial S}{\partial C}.$$

Die Summe S stellt zufolge der allgemeinen Formel (III) den reziproken Wert einer Entfernung dar. Es ist

$$S = \frac{1}{\sqrt{r^2 + C^2\cos^2\vartheta_1\,(\gamma^2 - \beta^2\sin^2\vartheta_1) - 2\,r\,C\cos\vartheta_1\sqrt{\gamma^2 - \beta^2\sin^2\vartheta_1}\cdot\cos\Gamma_1}} = \frac{1}{E}.$$

Ersetzen wir darin $\cos\Gamma_1$ durch seinen Wert Gl. (6 a), so wird

$$(8\,a)\quad \begin{cases} E^2 = r^2 + C^2\cos^2\vartheta_1\,(\gamma^2 - \beta^2\sin^2\vartheta_1) - 2\,r\,C\,[\cos\vartheta\cdot\gamma\cos^2\vartheta_1 \\ \qquad + \sin\vartheta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\cdot\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1\cos(\varphi - \varphi_1)]. \end{cases}$$

Andererseits ist, wenn E den Abstand des Aufpunktes $P(r, \vartheta, \varphi)$ von einem Punkte $Q_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ bedeutet,

$$(8\,b)\quad \begin{cases} E^2 = r^2 + [\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2] - 2\,r\,[\cos\vartheta\cdot\eta_1 + \sin\vartheta\cos\varphi\cdot\zeta_1 \\ \qquad\qquad + \sin\vartheta\sin\varphi\cdot\xi_1]. \end{cases}$$

Durch Vergleich dieser beiden Ausdrücke folgt

$$(8)\quad \begin{cases} \xi_1 = C\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\cdot\cos\vartheta_1\sin\vartheta_1\sin\varphi_1; \quad \eta_1 = C\,\gamma\cos^2\vartheta_1; \\ \zeta_1 = C\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\cdot\cos\vartheta_1\sin\vartheta_1\cos\varphi_1. \end{cases}$$

Durch Elimination von ϑ_1 und φ_1 aus den Gleichungen (8) ergibt sich, da $C\gamma > C\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ ist, die Gleichung eines verlängerten Rotationsellipsoids

$$(9) \qquad \frac{\xi_1^2 + \zeta_1^2}{\left[\frac{1}{2} C \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\right]^2} + \frac{[\eta_1 - \frac{1}{2} C \gamma]^2}{[\frac{1}{2} C \gamma]^2} = 1.$$

Der Punkt Q_1 liegt also auf einem verlängerten Rotationsellipsoid, dessen Halbachsen $\frac{1}{2} C \gamma$ und $\frac{1}{2} C \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ sind. Die Brennweite e' ist $\frac{1}{2} C \beta$ und die Brennlinie $2e' = C\beta$. Der Mittelpunkt des Hilfsellipsoids (9) und seine Brennpunkte $F\,(0;\ \frac{1}{2} C(\gamma - \beta);\ 0)$, $F_1\,(0;\ \frac{1}{2} C(\gamma + \beta);\ 0)$ liegen auf der positiven y_1-Achse. Und zwar hat der Mittelpunkt vom Transformationszentrum den Abstand $\frac{1}{2} C \gamma$, d. h. das Hilfsellipsoid liegt so, daß der eine Scheitel der großen Achse sich im Pol O befindet. Die große Achse des Ellipsoids fällt mit der Rotationsachse des gegebenen Ovaloids zusammen.

In der Potentialformel (7) können wir demnach die Integration nach ϑ_1 und φ_1 auffassen als eine solche über den Teil des Hilfsellipsoids, der in dem Winkelraum $(0, \Theta_1)$ liegt. Dieser Teil des Ellipsoids ist eine ellipsoidische Kappe, deren Scheitel innerhalb, — vom Pol um $C\gamma$ entfernt — deren Grenzkreis aber außerhalb des Ovaloids liegt. Das Oberflächenelement dieser Hilfsfläche, das gemäß der Methode für krummlinige orthogonale Koordinaten bestimmt wird,[1]) ist

$$(10) \qquad d\sigma = C^2 \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \cdot \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \cos^2(2\vartheta_1)} \cdot \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1.$$

Nach (7) setzt sich das Potential des Ovaloids aus zwei Summanden zusammen: $V = V_I + V_{II}$. Da ferner $S = \frac{1}{E}$ ist, so folgt für S'

$$S' = C \frac{\partial S}{\partial C} = C \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial C}.$$

Wir erhalten somit

$$(11\,a) \qquad V_I = 2C^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} \cos^2\vartheta_1 f(\cos\vartheta_1) \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1}{E}.$$

$$(11\,b) \qquad V_{II} = \frac{4}{3} C^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} \cos^2\vartheta_1 \cdot f_1(\cos\vartheta_1) \cdot C \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial C} \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1.$$

Da allgemein $$V = \int\int \frac{k\, d\sigma}{E}$$

[1]) Bd. II S. 3–5.

das Potential einer einfach mit Masse belegten Fläche ist und das Oberflächenelement der Kappe nach (10) bekannt ist, so können wir schließen, daß V_I das Potential der Oberfläche der Kappe ist, wenn diese einfach mit Masse von der Dichtigkeit

$$k = \frac{2\,C f(\cos\vartheta_1)\cdot\cos\vartheta_1}{\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\,\sqrt{\gamma^2-\beta^2\cos^2(2\vartheta_1)}} \tag{12}$$

belegt ist.

Die Deutung des Summanden V_{II} vollzieht sich gemäß der Überlegungen, wie sie in Abh. II S. 394 95 angestellt sind. Vergleichen wir dann die dort abgeleitete allgemeine Formel des Potentials für die besondere Art der Doppelbelegung mit dem Ausdruck (11 b), so erkennen wir, daß V_{II} das Potential der zweifach mit Masse belegten Oberfläche der Kappe ist. Das Moment der Doppelbelegung ergibt sich zufolge des Oberflächenelementes (10) als

$$\mu' = \frac{4}{3}\,\frac{C^2\cos\vartheta_1\, f_1(\cos\vartheta_1)}{\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\,\sqrt{\gamma^2-\beta^2\cos^2(2\vartheta_1)}}. \tag{13}$$

Die Masse des Ovaloids und die auf der Kappe einfach zu verteilende Masse sind einander gleich. Bezeichnen wir letztere mit M_1, so ist

$$M_1 = \int\int k\,d\sigma = 2\,C^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta_1} f(\cos\vartheta_1)\cos^2\vartheta_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1$$

$$= 4\,C^3 \int_0^{\Theta_1} f(\cos\vartheta_1)\cos^2\vartheta_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1,$$

wenn wir für k seinen Wert aus (12) und $d\sigma$ nach (10) einsetzen. Andererseits ist die Masse M des gegebenen Ovaloids nach Formel (VI), wenn wir darin die Grenzen für die Integrationsvariablen einführen, die Integration nach φ_1 und r_1 ausführen und die Werte von $\bar{r}_1$ und $\bar{\varrho}_1$ nach (3) einsetzen,

$$M = 2\pi\,C^3\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\Theta_1}\Big[(\gamma\cos\vartheta_1+\sqrt{\beta^2\cos^2\vartheta_1-1})^{n+3} - (\gamma\cos\vartheta_1-\sqrt{\beta^2\cos^2\vartheta_1-1})^{n+3}\Big]\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1$$

$$= 2\pi\,C^3 J_0 = 4\pi\,C^3\int_0^{\Theta_1} f(\cos\vartheta_1)\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1;$$

denn J_0 ist der Wert von J_n [Gl. (5)] für $n = 0$. Der endliche Wert von M ergibt sich durch Ausführung der Integration zu

$$M = \frac{\pi C^3}{2}\left[(\gamma^2 - 2\beta^2 - 1)\sqrt{\beta^2 - 1} + \frac{3\gamma^2 - 4\beta^2}{3\beta^2}\sqrt{\beta^2 - 1}^3 + \frac{\gamma^2\beta^2 - \beta^3 - \beta + 1}{\beta^3}\ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right)\right].$$

Das Ergebnis der Untersuchung können wir dahin zusammenfassen:

Das Potential des homogenen Rotationsovaloids, dessen Oberfläche durch Transformation mittels reziproker Radien in bezug auf einen äußeren Achsenpunkt aus einem ***abgeplatteten Rotationsellipsoid*** *hervorgegangen ist, kann durch dasjenige einer ellipsoidischen Kappe ersetzt werden, die einem* ***verlängerten Rotationsellipsoid*** *(9) angehört. Der Scheitel der Kappe hat vom Zentrum den Abstand $C\gamma$, und die Rotationsachse fällt mit der y_1-Achse des Systems zusammen. Die Kappe liegt teils innerhalb, teils außerhalb des Ovaloids, d. h. sein Potential besitzt sowohl im Innen- wie im Außenraum singuläre Stellen.*[1]) *Die Oberfläche der Kappe ist 1. einfach mit Masse von der Dichtigkeit k [Gl. (12)], 2. auf eine gewisse Art doppelt mit Masse belegt. Das Moment der Doppelbelegung ist μ' [Gl. (13)]. Ferner ist die auf der Kappe bei einfacher Belegung verteilte Masse gleich der Gesamtmasse des gegebenen Ovaloids.*

§ 2. Das Grundellipsoid ist ein verlängertes Rotationsellipsoid (Fig. 2—4).

Die Gleichung (1) geht im Falle des verlängerten Rotationsellipsoids ($b > a$) in Verbindung mit (2) und (II) in die Gleichung des Ovaloids

$$r_1 = C\left[\gamma\cos\vartheta_1 \pm \sqrt{\beta^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]$$

[1]) Bei den Resultaten von *Wangerin* liegt die Hilfsfläche ganz innerhalb des gegebenen Ovaloids, d. h. das Potential räumlicher Massen ist in das Innere derselben bis zu der Fläche, die die singulären Stellen des Potentials umschließt, bezw. bis zu singulären Punkten und der sie verbindenden Strecke fortsetzbar. Zu diesen Resultaten ist auch *Herglotz* auf anderem Wege gelangt in seiner Arbeit „Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen". (Gekrönte Preisschrift. Im Buchhandel bei Teubner 1914 erschienen.)

über. Die Begrenzungsfläche wird somit vom Radiusvektor in zwei Punkten geschnitten, deren Radienvektoren sich aus vorstehender Gleichung als

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{r}_1 = C\left[\gamma\cos\vartheta_1 + \sqrt{\beta'^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right], \\ \bar{\varrho}_1 = C\left[\gamma\cos\vartheta_1 - \sqrt{\beta'^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right] \end{cases}$$

ergeben. Darin sind C und γ dieselben Größen wie in § 1 S. 4, während

$$\beta'^2 = \frac{y_0^2 - (b^2 - a^2)}{y_0^2 - b^2} > 1 \quad \text{und} \quad \gamma^2 = \beta'^2 - \frac{b^2 - a^2}{b^2},\ \text{d. h. } \gamma^2 < \beta'^2$$

ist. Bezeichnet man mit Θ_1 den Winkel, den die Geraden des von O an das Ovaloid gelegten Tangentialkegels mit der Rotationsachse bilden, so wird für $\vartheta_1 = \Theta_1$ $\bar{r}_1$ gleich $\bar{\varrho}_1$, d. h.

$$\Theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\beta'}\right) = \arccos\frac{\sqrt{y_0^2 - b^2}}{\sqrt{y_0^2 - (b^2 - a^2)}}.$$

Variieren wir nun φ_1 von 0 bis 2π, ϑ_1 von 0 bis Θ_1 und r_1 von $\bar{\varrho}_1$ bis $\bar{r}_1$, so erhalten wir sämtliche Punkte des Ovaloids. In dem Ausdruck für das Potential des homogen mit Masse erfüllten Ovaloids

$$(4)\quad V = 2\pi\, C^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n\, P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}\, J'_n$$

erhalten wir für J'_n gemäß der analogen Umformungen wie in § 1 und, da $\gamma^2 < \beta'^2$ ist, unter Benutzung der Methode S. 376 Abh. II die Gleichung:

$$J'_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\beta'} \sqrt{\beta'^2 x^2 - 1}^{\,3}\left[(\beta'^2 - \gamma^2)(n+1)\,\lambda^n + (2n+6)\,\gamma\,\lambda^{n+1} + \frac{3\gamma\,\lambda^{n+1}}{\beta'^2 x^2 - 1}\right] dx,$$

wo

$$(5\,a)\quad \lambda = \gamma x^2 + x\sqrt{\beta'^2 - \gamma^2}\cdot\sqrt{1 - x^2}\cdot\cos\varphi$$

gesetzt wird. Um dem Integral eine zur Deutung des Potentials günstige Form zu geben, führen wir neue Integrationsvariable ein und zwar mittels der Substitutionen

(5 b) $$x = \cos\left(\tfrac{1}{2}\vartheta_2\right) \quad \text{und} \quad \gamma = \beta' \cos\alpha.$$

Dann geht (5 a) über in

(5) $$\lambda = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta'}{2}\left[\cos\alpha\cos\vartheta_2 + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi\right].$$

Ferner ist infolge (5 b)

$$dx = -\frac{\sin\vartheta_2\, d\vartheta_2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}; \quad \sqrt{\beta'^2 x' - 1}^{\,3} = \sqrt{\frac{\beta'^2-2}{2} + \frac{\beta'^2}{2}\cos\vartheta_2}^{\,3}.$$

Berücksichtigen wir diese Umformungen, so erhalten wir für J'_n folgenden Ausdruck:

(6 a)
$$\left\{\begin{aligned} J'_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Theta_2} & \frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{2} + \frac{\beta'^2}{2}\cos\vartheta_2}^{\,3}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\vartheta_2}} \\ & \cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta'}{2}\left(\cos\alpha\cos\vartheta_2 + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi\right)\right]^n \\ & \cdot\Bigg\{(\beta'^2-\gamma^2)(n+1) + \gamma(2n+6)\left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta'}{2}\left(\cos\alpha\cos\vartheta_2\right.\right. \\ & \qquad \left.\left. + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi\right)\right] \\ & + 3\gamma\,\frac{\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta'}{2}\left(\cos\alpha\cos\vartheta_2 + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi\right)}{\frac{\beta'^2-2}{2} + \frac{\beta'^2}{2}\cos\vartheta_2}\Bigg\}\cdot\sin\vartheta_2\, d\vartheta_2. \end{aligned}\right.$$

Da nun $d\omega = \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi$ das Oberflächenelement der Einheitskugel ist, so können wir in Gleichung (6 a) ϑ_2 und φ als Polarkoordinaten auf dieser ansehen. Die Integration ist dann über eine Kappe der Einheitskugel zu erstrecken, für die φ von 0 bis 2π, ϑ_2 von 0 bis Θ_2 zu variieren wären. Der Winkel Θ_2 ergibt sich zufolge der Substitutionen $x = \cos\vartheta_1$ [1]) und (5 b) und zufolge des Grenzwertes Θ_1 von ϑ_1 als

(6 b) $$\Theta_2 = \arccos\left(\frac{2-\beta'^2}{\beta'^2}\right) = \arccos\left(\frac{y_0^2 - (b^2+a^2)}{y_0^2 - (b^2-a^2)}\right).$$

Dieser Winkel Θ_2 kann nun ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein. Ist nämlich

[1]) s. S. 5.

$$y_0^2 > b^2 + a^2, \text{ so ist } \Theta_2 < \frac{\pi}{2},$$

$$y_0^2 < b^2 + a^2, \text{ so ist } \Theta_2 > \frac{\pi}{2}.$$

An Stelle der Polarkoordinaten ϑ_2, φ können wir andere u, v durch folgende Betrachtung einführen: Setzen wir in dem Ausdruck (5) für λ

$$\cos\alpha\cos\vartheta_2 + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi = \cos u,$$

so ist darin der Kosinussatz der Seiten eines sphärischen Dreiecks ausgesprochen. Und zwar sind α, ϑ_2, u die Seiten des sphärischen Dreiecks, in dem α und ϑ_2 den Winkel φ, α und u den Winkel v einschließen. Es bestehen dann die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \text{a)} & \cos u = \cos\alpha\cos\vartheta_2 + \sin\alpha\sin\vartheta_2\cos\varphi, \\ \text{b)} & \cos\vartheta_2 = \cos\alpha\cos u + \sin\alpha\sin u\cos v \\ \text{und} & \text{c)} \qquad \lambda = \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\beta'}{2}\cos u. \end{cases}$$

In dem sphärischen Dreieck NA_1D ist N der Pol der Veränderlichen ϑ_2 und φ. Durch diese also wird jeder Punkt A_1 der Kugelkappe in bezug auf N festgelegt. Wählen wir nun D als Pol, dessen sphärischer Abstand von N gleich α ist, so ist A_1 durch u und v bestimmt. In bezug auf diese neuen Polarkoordinaten wird das Oberflächenelement der Einheitskugel $d\omega = \sin u\, du\, dv$. Hinsichtlich der Lage des Poles D der Polarkoordinaten u, v ist folgendes zu beachten: Die Kugelkappe, die durch Integration nach ϑ_2 und φ entsteht, würde durch einen Parallelkreis begrenzt sein, dessen sphärischer Abstand vom Pole N gleich $\widehat{NA} = \Theta_2$ wäre, d. h. gleich dem größten Wert von ϑ_2. Es könnte nun eintreten, daß der Pol D auf der Kugelkappe zwischen N und A liegt, oder mit A zusammenfällt, oder ganz außerhalb derselben liegt; denn $\widehat{ND} = \alpha$ ist stets spitz,[1]) während $\widehat{NA} = \Theta_2$ spitz oder stumpf sein kann.[2]) Wir haben somit drei Fälle zu unterscheiden:

I. Fall: $\widehat{ND} < \widehat{NA}$, d. h. $\alpha < \Theta_2$.
II. Fall: $\widehat{ND} = \widehat{NA}$, d. h. $\alpha = \Theta_2$.
III. Fall: $\widehat{ND} > \widehat{NA}$, d. h. $\alpha > \Theta_2$.[3])

[1]) s. S. 11 (5 b). [2]) s. S. 11 (6 b). [3]) s. Fig. 2 a, 3 a, 4 a.

Diese drei Fälle, die sich durch Einführung der Veränderlichen u, v ergeben, sind bei der Transformation des verlängerten Rotationsellipsoids durch die Lage des Transformationszentrums charakterisiert. Die Seite α und der Maximalwert Θ_2 der Seite ϑ_2 des sphärischen Dreiecks sind durch die Gleichungen

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = \arccos\left(\frac{a\,y_0}{b\sqrt{y_0^2 - (b^2 - a^2)}}\right),$$
$$\Theta_2 = \arccos\left(\frac{y_0^2 - (b^2 + a^2)}{y_0^2 - (b^2 - a^2)}\right)$$

gegeben. α und Θ_2 sind somit nur von y_0, d. i. dem Abstand des Transformationszentrums vom Mittelpunkt des Ausgangsellipsoids, und von dessen Halbachsen abhängig. Es muß somit zwischen diesen drei Größen y_0, a, b eine solche Beziehung bestehen, daß $\alpha \lesseqgtr \Theta_2$ wird. Betrachten wir den Fall $\widehat{ND} = \widehat{NA}$, d. h. $\alpha = \Theta_2$, so können wir die rechten Seiten der vorstehenden Ausdrücke einander gleichsetzen, d. h. es muß sein:

$$\frac{a\,y_0}{b\sqrt{y_0^2 - (b^2 - a^2)}} = \frac{y_0^2 - (b^2 + a^2)}{y_0^2 - (b^2 - a^2)}. \tag{8}$$

Das ergibt eine quadratische Gleichung für y_0^2, deren Lösungen

$$y_0^2 = \frac{(b^2 + a^2)^2}{b^2 - a^2} \quad \text{und} \quad y_0^2 = b^2$$

sind. Die zweite Lösung kommt aber nicht in Betracht, da für unsere Untersuchung $y_0 > b$ vorausgesetzt war. Für y_0 erhalten wir

$$y_0 = \pm\frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Von diesen beiden Werten gilt wegen der Bedeutung von y_0 nur der positive. Für diese ausgezeichnete Lage des Transformationszentrums

$$y_0 = \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

wird somit $\alpha = \Theta_2$.

Wir haben somit entsprechend den drei Fällen S. 12:

$$y_0 \lesseqgtr \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \text{ d. h. } \alpha \lesseqgtr \Theta_2.$$

Für die Untersuchung der drei Fälle gehen wir von dem Integral J'_n aus, wie es durch Gleichung (6a) S. 11 gegeben ist, indem

wir darin die Veränderlichen u, v einführen und vorläufig von den Grenzen absehen. J'_n nimmt dann die Form an:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} J'_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\Bigg\{ & \int\int \sqrt{\beta'^2 - 2 + \frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,n} \Big/ \sqrt{1+\cos\vartheta_2}\; - (\gamma+\beta'\cos u)^n \\ & \cdot [(\beta'^2-\gamma^2)(n-1) + \gamma(n+3)(\gamma+\beta'\cos u)]\cdot \sin u\, du\, dv \\ - \tfrac{3}{4}\gamma & \int\int \sqrt{\beta'^2 - 2 + \frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,n} \Big/ \sqrt{1+\cos\vartheta_2}\; (\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\, du\, dv \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

I. Fall: $\widehat{ND} < \widehat{NA}$ bezw. $y_0^2 < \dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}$, d. h. $\alpha < \Theta_2$.[1])

Liegt der Pol D auf der Kugelkappe, so erhalten wir als Grenzen für u:

1. 0 und $u_0 = \Theta_2 - \alpha$; 2. $u_0 = \Theta_2 - \alpha$ und $u_1 = \Theta_2 + \alpha$.

Für v ergibt sich aus (7 b) S. 12 die Bestimmungsgleichung

$$v = \arccos\left(\frac{\cos\vartheta_2 - \cos\alpha\cos u}{\sin\alpha\sin u}\right).$$

Es ist also v eine Funktion von u; deshalb ist in (6) die Integration nach v als innere zu nehmen. Das Integral über v läßt sich infolge der Werte, die u annimmt, spalten. Solange nämlich die Ungleichung $0 < u \leq u_0$ besteht, geht v von $-\pi$ bis $+\pi$. Wächst u von u_0 bis u_1, so variiert v zwischen den Grenzen $-v_1$ und $+v_1$. Der Grenzwinkel v_1 bestimmt sich aus obiger Gleichung, wenn man darin ϑ_2 durch seinen Maximalwert Θ_2 ersetzt; d. h. geometrisch ist v_1 derjenige Winkel, den der 0-Meridian NDA mit demjenigen größten Kugelkreis über DD' bildet, der den Parallelkreis mit dem Durchmesser AA' berührt.[2]) Es wird also

$$(9)\qquad v_1 = \arccos\left(\frac{\cos\Theta_2 - \cos\alpha\cos u}{\sin\alpha\sin u}\right).$$

[1]) s. Fig. 2a, 2.

[2]) s. Fig. 2a.

Der Ausdruck (6) von J'_n geht in diesem Falle über in:

$$J'_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{u_0} f(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)^n\cdot[(\beta'^2-\gamma^2)(n+1)\right.$$
$$+\gamma(n+3)(\gamma+\beta'\cos u)]\sin u\,du$$
$$-\frac{3}{4}\gamma\int_0^{u_0} f_1(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\,du+\int_{u_0}^{u_1} F(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)^n$$
$$\cdot[(\beta'^2-\gamma^2)(n+1)+\gamma(n+3)(\gamma+\beta'\cos u)]\sin u\,du$$
$$\left.+\frac{3}{4}\gamma\int_{u_0}^{u_1} F_1(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\,du\right\}.$$

Darin bedeuten:

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\text{a)} & f(u)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,3}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\,dv;\\[2ex]
\text{b)} & f_1(u)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\,dv.\\[2ex]
\text{c)} & F(u)=\displaystyle\int_0^{v_1}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,3}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\,dv;\\[2ex]
\text{d)} & F_1(u)=\displaystyle\int_0^{v_1}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{2}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\,dv.
\end{array}\right.$$

Da ferner

$$(n+1)\,(\gamma+\beta'\cos u)^n\sin u=-\frac{1}{\beta'}\frac{d(\gamma+\beta'\cos u)^{n+2}}{du}$$

$$(n+3)\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u=-\frac{1}{\beta'}\frac{d(\gamma+\beta'\cos u)^{n+2}}{du}$$
$$+(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u$$

ist, so wird

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
J'_n = &-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\beta'^3}\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{u_0} f(u)\left[(\beta'^2-\gamma^2)\,\frac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}}{du}\right.\right.\\
&\qquad\left. +\gamma\,\frac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+2}}{du}\right]du\\
&+\int_{u_0}^{u_1} F(u)\left[(\beta'^2-\gamma^2)\,\frac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}}{du}\right.\\
&\qquad\left.\left. +\gamma\,\frac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+2}}{du}\right]du\right\}\\
&+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\beta'^3}\cdot\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{u_0}[f(u)+\tfrac{3}{4}f_1(u)]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\,du\right.\\
&\qquad\left.+\int_{u_0}^{u_1}[F(u)+\tfrac{3}{4}F_1(u)]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\,du\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die teilweise Integration des ersten Klammerausdruckes in (11) ergibt einen Ausdruck, der in den von der Integration freien Gliedern die Funktionen $f(0)$, $f(u_0)$, $F(u_0)$, $F(u_1)$, d. s. die unter (10 a) und (10 c) gegebenen Funktionen für u gleich 0, bezw. u_0, u_1, enthält. Wir erhalten

$$
f(0) = \pi\sqrt{\beta'}\,\frac{\sqrt[4]{\beta'(\beta'+\gamma)-2}^{\,3}}{\sqrt{\beta'+\gamma}}\quad;\quad f(u_0) = F(u_0);
$$

denn für $u = u_0$ wird $v_1 = \pi$, d. h. die Integrationsgrenzen in $(F(u))_{u=u_0}$ werden mit denen von $f(u)$ identisch. Und da die Integranden der Integrale, die die beiden Funktionen definieren, gleich sind, so stimmen die Funktionen für $u = u_0$ überein. Weiterhin ist $F(u_1) = 0$; denn für $u = u_1$ wird $v_1 = 0$ und damit das Integral in (10 c). Infolge dieser Feststellungen ergibt die teilweise Integration des ersten Klammerausdruckes in (11)

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\pi\sqrt{\beta'^3}\cdot\sqrt[4]{(\beta'+\gamma)\,[\beta'(\beta'+\gamma)-2]}^{\,3}\cdot(\gamma+\beta')^n\\
&\qquad-\beta'\int_0^{u_0}[\beta'+\gamma\cos u]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\,\frac{df(u)}{du}\,du\\
&\qquad-\beta'\int_{u_0}^{u_1}[\beta'+\gamma\cos u]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\,\frac{dF(u)}{du}\,du.
\end{aligned}
\right.
$$

Dieses umgeformte Glied setzen wir in (11) ein:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
J'_n = {} & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{(\beta'+\gamma)\,[\beta'(\beta'+\gamma)-2]}{4\beta'}}^{3}\cdot(\beta'+\gamma)^n \\
& + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{u_0}(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\cdot\Big[(\beta'+\gamma\cos u)\,\frac{d\,f(u)}{d\,u} \\
& \qquad + \gamma\,(f(u)+\tfrac{3}{4}f_1(u))\sin u\Big]\,d\,u \\
& + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta'^2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{u_0}^{u_1}(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\cdot\Big[(\beta'+\gamma\cos u)\,\frac{d\,F(u)}{d\,u} \\
& \qquad + \gamma\,(F(u)+\tfrac{3}{4}F_1(u))\sin u\Big]\,d\,u.
\end{aligned}\right.
$$

Hierin lassen sich nun die eckigen Klammern der Integranden vereinfachen. Analog zu Abh. II S. 380/81 wird

$$
(14\,a)\qquad \frac{d\,f(u)}{d\,u}(\beta'+\gamma\cos u)+\gamma\sin u\,(f(u)+\tfrac{3}{4}f_1(u)) = \beta'\,\mathrm{F}(u),
$$

wobei gesetzt ist

$$
(14\,b)\quad \mathrm{F}(u) = \int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}^{\,3}}\Big[\frac{1}{4}+\frac{\beta'^2}{4}(1+\cos\vartheta_2)\Big]\cdot(\cos\alpha+\cos u)\sin\alpha\cos v\,d\,v.
$$

Der Klammerausdruck des zweiten Integranden in (13) kann auf eine ähnliche Form gebracht werden. Da aber darin der Differentialquotient von $F(u)$ vorkommt und $F(u)$ nach (10c) als ein Integral definiert ist, dessen obere Grenze v_1 eine Funktion von u ist, so ist zunächst dieser Differentialquotient zu bilden; es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,F(u)}{d\,u} &= \frac{d}{d\,u}\int_0^{v_1}\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,3}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\,d\,v \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\,[\cos\alpha\cos u+\sin\alpha\sin u\cos v_1]}^{\,3}}{\sqrt{1+\cos\alpha\cos u+\sin\alpha\sin u\cos v_1}}\cdot\frac{d\,v_1}{d\,u} \\
&\qquad + \int_0^{v_1}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,3}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}}\right]d\,v.
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (9) und (6 b) wird der Faktor von $\frac{dv_1}{du}$ zu Null. Es wird somit

$$\frac{d\,F(u)}{du} = \int_0^{v_1} \frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4} + \frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}^{\,3}} \left[\frac{1}{4} + \frac{\beta'^2}{4}(1+\cos\vartheta_2)\right] \frac{d\cos\vartheta_2}{du} \cdot dv$$

und infolgedessen

$$(15\,a)\quad \frac{d\,F(u)}{du}(\beta' + \gamma\cos u) + \gamma\sin u\,[F(u) + \tfrac{3}{4}F_1(u)] = \beta'\,F_1(u).$$

Darin ist

$$(15\,b)\quad F_1(u) = \int_0^{v_1} \frac{\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4} + \frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}}{\sqrt{1+\cos\vartheta_2}^{\,3}} \left[\frac{1}{4} + \frac{\beta'^2}{4}(1+\cos\vartheta_2)\right] \cdot (\cos\alpha + \cos u)\sin\alpha\cos v \cdot dv.$$

Gemäß diesen Umformungen (14 a) und (15 a) ergibt sich für J'_n der endgültige Ausdruck

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} J'_n = {} & \frac{2}{3}\left(\frac{\beta'+\gamma}{2}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{(\beta'+\gamma)\,[\beta'(\beta'+\gamma)-2]}{4\,\beta'}}^{\,3} \\ & + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\beta'}\cdot\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{u_0}(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\,\mathrm{F}(u)\,du \right. \\ & \left. + \int_{u_0}^{u_1}(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\,\mathrm{F}_1(u)\,du\right]. \end{aligned} \right.$$

Diesen Wert von J'_n führen wir in die Potentialformel (4) des Ovaloids ein. Dabei können wir die Summe der Integrale durch das Integral der Summe ersetzen, da die Reihe konvergiert; es ist dann

$$V = \frac{4}{3}\pi C^3 \sqrt{\frac{(\beta'+\gamma)\,[\beta'(\beta'+\gamma)-2]}{4\beta'}}^{3} S_1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\beta'} C^3 \left[\int_0^{u_0} \mathrm{F}(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)\,S\,du + \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{F}_1(u)\,(\gamma+\beta'\cos u)\,S\,du\right],$$

wenn wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \left(\frac{\beta'+\gamma}{2}\right)^n = S_1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \left(\frac{\gamma+\beta'\cos u}{2}\right)^n = S$$

setzen. Die beiden Summen S_1 und S stellen gemäß der Formel (III) reziproke Entfernungen dar. Und zwar ist S_1 der reziproke Abstand des Aufpunktes $P(r, \vartheta, \varphi)$ von dem Achsenpunkt $Q_1(0; \eta_1; 0)$. Dagegen ist die Summe S als reziproke Entfernung des Aufpunktes von einem zwischen $Q_1(0; \eta_1; 0)$ und $Q_3(0; \eta_3; 0)$ gelegenen Achsenpunkt Q anzusehen. Für die weitere Untersuchung kommt noch ein Punkt Q_2 in Frage, der ebenfalls auf der positiven y_1-Achse liegt. Die drei Achsenpunkte besitzen die Abszissen

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2} C(\gamma+\beta'); \quad \eta_2 = \tfrac{1}{2} C(\gamma-\beta'\cos u_0); \quad \eta_3 = \tfrac{1}{2} C(\gamma+\gamma'\cos u_1).$$

Die beiden Summen können wir demnach auch schreiben als $S_1 = \dfrac{1}{E_1}$ und $S = \dfrac{1}{E}$, wobei

$$E_1^2 = r^2 + C^2\left(\frac{\gamma+\beta'}{2}\right)^2 - 2rC\frac{\gamma+\beta'}{2}\cos\vartheta$$

$$E^2 = r^2 + C^2\left(\frac{\gamma+\beta'\cos u}{2}\right)^2 - 2rC\frac{\gamma+\beta'\cos u}{2}\cos\vartheta$$

ist. Somit erhalten wir für das Potential folgenden Ausdruck:

$$(17)\quad \left\{ V = \frac{4}{3}\pi C^3 \sqrt{\frac{(\beta'+\gamma)\,[\beta'(\beta'+\gamma)-2]}{4\beta'}}^{3} \cdot \frac{1}{E_1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\beta'} C^3 \left[\int_0^{u_0} \frac{(\gamma+\beta'\cos u)\,\mathrm{F}(u)}{E}\,du + \int_{u_0}^{u_1} \frac{(\gamma+\beta'\cos u)\,\mathrm{F}_1(u)}{E}\,du\right],\right.$$

der eine leichte Deutung desselben gestattet. Dazu schreiben wir (17) noch in der Form $V = V_I + V_{II}$. V_I ist das Potential des Punktes Q_1, in dem die Masse M_1 konzentriert ist. V_{II} dagegen stellt ein Linienpotential dar. Der Massenpunkt Q_1 sowie die Strecke $Q_1 Q_3$ liegen in der y_1-Achse. $Q_1 Q_3$ ist mit Masse von verschiedener Dichtigkeit belegt. Die Art der Belegung ergibt sich aus den beiden Summanden von (17 b). Nach dem Potential eines Punktes $V = M \frac{1}{E}$ ergibt sich aus V_I für die in Q_1 konzentrierte Masse

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi C^3 \sqrt{\frac{(\beta' + \gamma)\,[\beta'(\beta' + \gamma) - 2]}{4\beta'}}^3 . \tag{18}$$

Die Masse $\overline{M} = M_2 - M_3$, die auf der Strecke $Q_1 Q_3$ mit den Dichtigkeiten k_2, k_3 verteilt ist, läßt sich bestimmen, indem wir in V_{II}

$$C \cdot \frac{\gamma + \beta' \cos u}{2} = \eta, \text{ d. h. } \cos u = \frac{2\eta - C\gamma}{C\beta'} \tag{19}$$

$$\sin u = \frac{1}{C\beta'} \sqrt{C^2 \beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}$$

setzen, so daß damit das Linienpotential V_{II} die Form annimmt

$$V_{II} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{\beta'} \cdot 2 \left[\int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\eta \cdot C^2 \cdot \mathrm{F}(u)}{\sqrt{C^2 \beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}} \frac{d\eta}{E} + \int_{\eta_3}^{\eta_2} \frac{\eta\, C^2\, \mathrm{F}_1(u)}{\sqrt{C^2 \beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}} \cdot \frac{d\eta}{E} \right]. \tag{20}$$

Die durch (14 b) und (15 b) bestimmten Funktionen $\mathrm{F}(u)$ und $\mathrm{F}_1(u)$ können unter Berücksichtigung von (5 b) S. 11, (7 b) S. 12 und (19) durch η ausgedrückt werden:

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\beta'}{2^3} \cdot \frac{1}{C} \sqrt{\beta'^2 - \gamma^2} \int_0^{\pi} \chi(\eta, v) \cos v \, dv,$$

$$\mathrm{F}_1(u) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{C} \sqrt{\beta'^2 - \gamma^2} \int_0^{v} \chi(\eta, v) \cos v \, dv. \tag{21}$$

$$\chi(\eta, v) = \frac{\sqrt{\Psi(\eta, v) - C}}{\sqrt{\Psi(\eta, v)}^3} \cdot [C + 2\Psi(\eta, v)] \cdot \eta$$

$$2\Psi(\eta, v) = C\beta'^2 + \gamma(2\eta - C\gamma) + \beta'\sqrt{\beta'^2 - \gamma^2} \cdot \sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2} \cdot \cos v.$$

Das Potential einer in der z-Achse gelegenen mit Masse von der Dichtigkeit k belegten Linie ist allgemein

$$V = \int \frac{k\, dz}{E}$$

und ihre Masse

$$M = \int k\, dz.$$

Nun ist zufolge (21) die Gleichung (20) in der Form

$$V_{II} = \frac{1}{6}\sqrt{\beta'^2 - \gamma^2}\left[\int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{E} \cdot \int_0^{\pi} \eta\, \frac{C \cdot \chi(\eta, v) \cos v}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}}\, dv + \int_{\eta_3}^{\eta_1} \frac{d\eta}{E} \int_0^{v_1} \eta\, \frac{C\chi(\eta, v) \cos v}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}}\, dv\right]$$

zu schreiben, so daß wir aus einem Vergleich dieses Ausdruckes V_{II} mit obigen allgemeinen Formeln schließen dürfen, daß die Strecke $\overline{Q_1 Q_3}$ von Q_1 bis Q_2 mit der Masse M_2 von der Dichtigkeit

$$(22)\quad \left\{ k_2 = \frac{1}{6}\sqrt{\beta'^2 - \gamma^2} \cdot C \int_0^{\pi} \frac{\eta \cdot \chi(\eta, v) \cos v}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}}\, dv = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\beta'} \frac{C\eta \cdot \mathrm{F}(u)}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}}, \right.$$

und von Q_2 bis Q_3 mit der Masse M_3 von der Dichtigkeit

$$(23)\quad \left\{ k_3 = \frac{1}{6}\sqrt{\beta'^2 - \gamma^2}\, C \int_0^{v_1} \frac{\eta \cdot \chi(\eta, v) \cos v}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}}\, dv = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\beta'} \frac{C\eta\, \mathrm{F}_1(u)}{\sqrt{C^2\beta'^2 - (2\eta - C\gamma)^2}} \right.$$

belegt ist.

Die Gesamtmasse des Ovaloids muß gleich der Summe der Massen sein, die in dem Punkte Q_1 konzentriert und auf der Strecke $\overline{Q_1 Q_3}$ verteilt sind; d. h. $M = M_1 + (M_2 + M_3)$. Die Masse des Ovaloids ist gegeben durch die Gleichung

$$M = 2\pi\, C^3\, J'_0.$$ [1])

[1]) s. S. 8.

Bilden wir J'_0, indem wir in (16) $n = 0$ setzen, und mit $2\pi\,\ell^3$ multiplizieren, so wird

$$M = M_1 + \left[\int_{\eta_2}^{\eta_1} k_2\, d\eta + \int_{\eta_3}^{\eta_2} k_3\, d\eta\right].^{1)}$$

II. Fall: $\widehat{ND} = \widehat{NA}$ **bezw.** $y_0 = \dfrac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, **d. h.** $\alpha = \Theta_2$.[2)]

In diesem Falle ist der Maximalwert von ϑ_2

$$\Theta_2 = \arccos\left(\frac{2 - \beta'^2}{\beta'^2}\right).$$

Ferner ist das frühere $u_0 = 0$ und $u_1 = 2\,\Theta_2$. Es ergeben sich daher als Grenzen des Integrals J'_n Gleichung (6) S. 14 für u: 0 und $\bar{u} = 2\,\Theta_2$, und für v: $-\bar{v}$ und $+\bar{v}$. Dabei ist $\bar{v}$ wieder der Winkel, den der Meridian DND' mit demjenigen größten Kugelkreis über DD' bildet, der den Parallelkreis mit dem Durchmesser AA' bezw. DA' berührt. Der Wert des Winkels $\bar{v}$ ergibt sich aus (7 b) als

$$\bar{v} = \arccos\left(\operatorname{ctg}\,\Theta_2 \cdot \operatorname{tg}\,\frac{u}{2}\right).$$

Das Integral (6) erhalten wir in der Form

$$(24)\quad \begin{cases} J'_n = -\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\beta'^3}\cdot\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\bar{u}} \varphi(u)\left[(\beta'^2-\gamma^2)\,\frac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}}{du}\right. \\ \qquad\qquad \left. +\,\gamma\,\dfrac{d\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+2}}{du}\right]\cdot du \\ \quad +\,\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\beta'^2}\cdot\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1}{\pi}\,\gamma\displaystyle\int_0^{\bar{u}} [\varphi(u) + \tfrac{3}{4}\varphi_1(u)]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\sin u\, du. \end{cases}$$

Dabei sind die Funktionen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ bis auf die obere Grenze $\bar{v}$ mit den Funktionen $F(u)$ und $F_1(u)$ des I. Falles identisch.[3)] Bei der teilweisen Integration des ersten Summanden

[1)] Der Beweis der Endlichkeit des Klammerausdruckes ist analog zu dem in Abh. II S. 389, Zusatz 1 für M'.

[2)] Fig. 3 a, 3.

[3)] s. S. 15.

in (24) verschwindet das von der Integration freie Glied; denn die dabei auftretenden Funktionen $\varphi(\bar{u})$ und $\varphi(0)$ werden zu Null. Fur $\bar{u} = 2\Theta_2$ wird die Grenze $\bar{v} = 0$ und damit $\varphi(\bar{u}) = 0$. Aus der Figur 3a ist übrigens leicht zu erkennen, daß $\bar{u} = 2\Theta_2$ für $\bar{v} = 0$ wird. Daß $\varphi(0) = 0$ wird, ergibt sich, wenn wir in $\varphi(u)\ u = 0$ setzen. Es wird dann $\bar{v} = \frac{\pi}{2}$; das Integral selbst also bleibt zwischen endlichen Grenzen. Hier wird die Wurzel im Zähler des Integranden zu Null; nämlich:

$$\left[\sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\vartheta_2}^{\,3}\right]_{u=0 \text{ in } \cos\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\cos\Theta_2}^{\,3}\ ^{1)}$$

$$= \sqrt{\frac{\beta'^2-2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}\,\frac{2-\beta'^2}{\beta'^2}}^{\,3} = 0.$$

Danach geht die Gleichung (24) über in:

$$(25)\quad \begin{cases} J'_n = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\beta'^2}\cdot\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\bar{u}}\Big[(\beta'+\gamma\cos u)\,\frac{d\,\varphi(u)}{du} \\ \qquad\qquad + \gamma\,(\varphi(u) + \tfrac{3}{4}\varphi_1(u))\,\sin u\Big]\,(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\cdot du \\ \qquad = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\beta'}\cdot\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\bar{u}}(\gamma+\beta'\cos u)^{n+1}\,\Phi(u)\,du. \end{cases}$$

Da $\varphi(u)$ durch ein Integral dargestellt wird, dessen obere Grenze $\bar{v}$ von u abhängig ist, so ist zunächst $\frac{d\,\varphi(u)}{du}$ zu bilden, und zwar ergibt sich dafür ein Integral zwischen den Grenzen 0 und $\bar{v}$, dessen Integrand mit dem von $\frac{d\,F(u)}{du}$ [2)] identisch ist. Dementsprechend ist auch die in (25) eingeführte Funktion $\Phi(u)$ mit $F_1(u)$ bis auf die Grenzen des Integrals zu identifizieren.

Den Ausdruck (25) für J'_n setzen wir in die Potentialformel (4) S. 10 ein; indem wir zugleich

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^n\,P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}\left(\frac{\gamma+\beta'\cos u}{2}\right)^n = S = \frac{1}{E}$$

[1)] Da im Falle II $\alpha = \Theta_2$ ist, wird $(\cos\vartheta_2)_{u=0} = \cos\Theta_2$.

[2)] s. S. 17.

setzen, wird

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\beta'} \cdot C^3 \int_0^{\bar{u}} \frac{(\gamma + \beta' \cos u)\ \Phi(u)}{E}\, du. \tag{26}$$

E ist die Entfernung des Aufpunktes $P(r, \vartheta, \varphi)$ von einem Punkte $\bar{Q}$ der Strecke $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2$. Die Punkte $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ gehören der Rotationsachse an; ihre Abstände vom Transformationszentrum sind

$$\bar{\eta}_1 = \tfrac{1}{2} C(\gamma + \beta'); \quad \bar{\eta}_2 = \tfrac{1}{2} C(\gamma + \beta' \cos \bar{u}) = \tfrac{1}{2} C(\gamma + \beta' \cos(2\Theta_2)).$$

Die auf $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2$ verteilte Masse $\bar{M}$ besitzt die Dichtigkeit

$$\bar{k} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\beta'} \cdot \frac{C\bar{\eta} \cdot \Phi(u)}{\sqrt{C\beta'^2 - (2\bar{\eta} - C\gamma)^2}}. \tag{27}$$ [1])

Ferner ist $\bar{M} = M$, d. h. gleich der Masse des gegebenen Ovaloids.

III. Fall: $\widehat{ND} > \widehat{NA}$ bezw. $y_0 > \dfrac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, d. h. $\alpha > \Theta_2$. [2])

Der Pol D der neuen Polarkoordinaten u, v liegt außerhalb der betrachteten Kugelkappe. Alsdann ergeben sich die Grenzen für die Veränderlichen: $u' = \alpha - \Theta_2$ und $u'' = \alpha + \Theta_2$, $-v'$ und $+v'$. Dabei ist v' durch die Gleichung

$$v' = \arccos\left(\frac{\cos \Theta_2 - \cos \alpha \cos u}{\sin \alpha \sin u}\right)$$

bestimmt.

Durch Einführung dieser Grenzen in das Integral (6) S. 14 und durch die analogen Umformungen und Betrachtungen, wie sie im I. bezw. II. Falle durchgeführt sind, gelangen wir wiederum zu dem Potential einer Strecke, nämlich

$$V = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\beta'} \cdot C^3 \int_{u'}^{u''} \frac{(\gamma + \beta' \cos u)\ \Psi(u)}{E}\, du. \tag{28}$$

Darin ist $\Psi(u)$ bis auf die Grenze v' mit $F_1(u)$ zu identifizieren und die Punkte der Strecke erfüllen die Gleichung

$$\eta' = \tfrac{1}{2} C(\gamma + \beta' \cos u).$$

[1]) $\Phi(u)$ ist analog $F_1(u)$ als Funktion von $\bar{\eta}$ ausdrückbar.
[2]) Fig. 4a, 4.

u variiert von u' bis u''. Die auf der Strecke $Q'_1 Q'_2$ verteilte Masse M' besitzt die Dichtigkeit

$$k' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\beta'} \cdot \frac{C \eta' \Psi(u)}{\sqrt{C^2 \beta'^2 - (2\eta' - C\gamma)^2}}. \tag{29}$$

Die Untersuchung der drei Fälle läßt sich zu dem Ergebnis zusammenfassen:

Das Potential eines homogen mit Masse erfüllten Ovaloids, dessen Begrenzungsfläche durch Transformation mittels reziproker Radien aus einem verlängerten Rotationsellipsoid, für das das Transformationszentrum ein äußerer Achsenpunkt ist, hervorgeht, kann man ersetzen

I. durch das Potential eines Massenpunktes, vermehrt um das einer Strecke, wenn $y_0 < \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ *ist. Der Punkt* Q_1, *in dem die Masse* M_1 *[Gl. (18)] konzentriert ist, liegt auf der positiven Rotationsachse im Abstande* $\frac{1}{2} C (\gamma' + \beta)$ *vom Transformationszentrum. Die Strecke* $\overline{Q_1 Q_3}$, *deren Punkte der Gleichung* $\eta = \frac{1}{2} C (\gamma + \beta' \cos u)$ *genügen, weist eine gewisse Massenbelegung auf, deren Dichtigkeiten durch die Gleichungen (22 b) und (23 b) gegeben sind.*

II. durch das Potential einer materiellen Strecke, wenn $y_0 = \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ *ist. Die Punkte der Strecke* $\overline{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}$ *erfüllen die Gleichung* $\bar{\eta} = \frac{1}{2} C (\gamma + \beta' \cos u)$, *wobei* u *von 0 bis* $2\Theta_2$ *variiert. Auf der Strecke ist die Masse des Ovaloids mit der Dichtigkeit* $\bar{k}$ *[Gl. (27)] verteilt.*

III. ebenfalls durch das Potential einer materiellen Strecke, wenn $y_0 > \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ *ist. Und zwar genügen die Punkte der Strecke* $\overline{Q'_1 Q'_2}$ *der Gleichung* $\eta' = \frac{1}{2} C (\gamma + \beta' \cos u)$, *in der* u *von* u' *bis* u'' *variiert. Die Dichtigkeit* k' *der Belegung ist durch Gleichung (29) gegeben.*

II. Abschnitt.

Das Potential von Ovaloiden, die durch Inversion aus Rotationshyperboloiden entstehen.

§ 1. Das Grundhyperboloid ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid.

Die Gleichung des zweischaligen Rotationshyperboloids

$$\frac{(Y-y_0)^2}{b^2} - \frac{X^2+Z^2}{a^2} = 1,$$

für welches $y_0 > b$ ist, d. h. für welches das Transformationszentrum ein innerer Achsenpunkt ist, geht gemäß den Transformationsgleichungen (I) in die des Ovaloids über:

$$\frac{R^4 b^2}{y_0^2 - b^2}\left[\frac{y_1^2}{y_0^2-b^2} + \frac{x_1^2+z_1^2}{a^2}\right] = \left[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{R^2 y_0 y_1}{y_0^2 - b^2}\right]^2.$$

Mit Hilfe der Seite 2 definierten Polarkoordinaten ergibt sich die Gleichung des Ovaloids in der Form

$$r_1 = C_1\left[\gamma_1 \cos\vartheta_1 \pm \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]; \tag{1}$$

darin ist

$$C_1 = \frac{R^2 b}{a\sqrt{y_0^2-b^2}}; \quad \gamma_1 = \frac{a\,y_0}{b\sqrt{y_0^2-b^2}}; \quad \beta_1^2 = \frac{(a^2+b^2)-y_0^2}{y_0^2-b^2}.$$

Wir müssen aber beachten, daß $y_0 \lessgtr e = \sqrt{a^2+b^2}$ und damit $\beta_1^2 \gtrless 0$ sein kann. Die Gestalt des Ovaloids ist in allen drei Fällen schalenförmig, d. h. es besitzt einen inneren Hohlraum und im Transformationszentrum einen Doppelpunkt. Jeder Radiusvektor innerhalb des Winkelraumes $(0, \Theta_1)$ schneidet die Fläche zweimal. Θ_1 ist dabei der Winkel, den die Tangente der Meridiankurve der Grenzfläche des inneren Hohlraumes im Doppelpunkt mit der y_1-Achse bildet. Genügt dagegen ϑ_1 der Ungleichung $\Theta_1 < \vartheta_1 < \bar{\Theta}_1$, so wird die Fläche nur in einem Punkt geschnitten. $\bar{\Theta}_1$ ist hier der Winkel, den die Tangente der Meridiankurve der äußeren Grenzfläche im Doppelpunkt mit der positiven y_1-Achse einschließt. Demnach ist das Integrationsgebiet in zwei Teile zu zerlegen. Für den ersten ist φ_1 von 0

bis 2π, ϑ_1 von 0 bis Θ_1 und r_1 von $\bar{\varrho}_1$ bis $\bar{r}_1$ zu variieren, wenn $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{r}_1$ die Radienvektoren der Durchstoßpunkte sind. Die Grenzen von φ_1 bleiben für den zweiten Teil ungeändert, während nach ϑ_1 zwischen Θ_1 und $\bar{\Theta}_1$, nach r_1 zwischen 0 und $\bar{r}_1$ zu integrieren ist. Die Werte der Grenzwinkel und der Radienvektoren werden in den drei Fällen verschiedene Werte annehmen. Wir untersuchen zunächst den

I. Fall: $y_0 < e$, **d. h.** $\beta_1^2 > 0$ (Fig. 5). Dafür besteht zwischen den Größen γ_1 und β_1^2 die Relation:

$$\gamma_1^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2} + \beta_1^2, \text{ d. h. } \gamma_1^2 > \beta_1^2$$

und die Radienvektoren sind

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{r}_1 = C_1\left[\gamma_1 \cos\vartheta_1 + \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]; \\ \bar{\varrho}_1 = C_1\left[\gamma_1 \cos\vartheta_1 - \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]. \end{cases}$$

Für die Grenzwinkel Θ_1 und $\bar{\Theta}_1$ werden die Radienvektoren zu Null, so daß

$$\Theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2-\beta_1^2}}\right) < \frac{\pi}{2};\quad \bar{\Theta}_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2-\beta_1^2}}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Die so bestimmten Grenzen der Veränderlichen setzen wir in die Formel (V), durch die das Potential eines homogenen Ovaloids gegeben ist, ein, führen die Integration nach r_1 aus und ersetzen $\bar{r}_1$ und $\bar{\varrho}_1$ durch die gegebenen Werte (2); dann wird

$$V = 2\pi\, C_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1^n\, P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}\, J''_n.$$

Das Integral J''_n ergibt sich in der Form

$$(3)\quad \begin{cases} J''_n = \dfrac{1}{n+3}\displaystyle\int_0^{\Theta_1} \left\{\left[\gamma_1\cos\vartheta_1 + \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3} - \left[\gamma_1\cos\vartheta_1 \right.\right. \\ \qquad \left.\left. - \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3}\right\} P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \\ \quad + \dfrac{1}{n+3}\displaystyle\int_{\bar{\Theta}_1}^{\Theta_1} \left[\gamma_1\cos\vartheta_1 + \sqrt{1+\beta_1^2\cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3} \\ \qquad\qquad \cdot P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1. \end{cases}$$

Dieses wird mittels der Substitution $x = \cos\vartheta_1$ und Entwicklung der Wurzel

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} J''_n = {} & 2\gamma_1{}^{n+2}\int_0^1 x^{n+2}\sqrt{1+\beta_1{}^2 x^2}\,P_n(x)\,dx \\ & + 2\sum_{p=0}^{(n+2)\,(n+1)\,\ldots\,(n-2p+1)} \cdot \gamma^{n-2p} \\ & \cdot \int_0^1 x^{n-2p}\sqrt{1+\beta_1{}^2 x^2}^{-2p-3}\cdot P_n(x)\,dx. \end{aligned}\right.$$

Gleichung (4) stellt aber dasselbe Integral dar, wie es in Abh. II S. 369 unter (1 a) angegeben ist. Wir gelangen gemäß den Umformungen S. 370/74 und der Substitution S. 374, (1) zu dem Ausdruck

$$J''_n = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}\vartheta_1\; P_n(\cos\vartheta_2)\,\sqrt{\gamma_1{}^2-\beta_1{}^2\sin^2\vartheta_1}^{-n}\,[3f(\cos\vartheta_1) + 2nf_1(\cos\vartheta_1)]\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1,$$

$$f(\cos\vartheta_1) = (\gamma_1{}^2-\beta_1{}^2+2\beta_1{}^2\cos^2\vartheta_1+1)\sqrt{1+\beta_1{}^2\cos^2\vartheta_1},$$

$$f_1(\cos\vartheta_1) = \sqrt{1+\beta_1{}^2\cos^2\vartheta_1}^{\,3},$$

und somit zu

$$V = \frac{4\pi}{3}\,C_1{}^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1{}^n\,P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}\vartheta_1\,\sqrt{\gamma_1{}^2-\beta_1{}^2\sin^2\vartheta_1}^{\,n}\,P_n(\cos\vartheta_2) \cdot [3f(\cos\vartheta_1)+2nf_1(\cos\vartheta_1)]\cdot\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1.$$

Diese Gleichung für V ist identisch mit (1) S. 391 Abh. II. Es erübrigt sich damit eine weitere Durchführung der Rechnung; denn wir gelangen zu genau dem gleichen Ergebnis, das sich bei der Untersuchung des Potentials desjenigen Ovaloids ergibt, das aus einem verlängerten Rotationsellipsoid durch Inversion von einem zwischen Brennpunkt und Scheitel gelegenen Achsenpunkt hervorgeht.[1])

Im **II. Fall: $y_0 = e$, d. h. $\beta_1{}^2 = 0$** (Fig. 6) ist der auf der negativen Y-Achse gelegene Brennpunkt das Inversionszentrum. Mit dem Wert $\beta_1{}^2 = 0$ gehen wir in die Gleichung des Ovaloids[2]) und des Hilfsellipsoids.[3])

[1]) s. Abh. II S. 391. [2]) s. S. 26 (1). [3]) s. Anm. 1.

Wir erhalten dann als Grenzfläche des Ovaloids

(1 a) $$r_1 = C_1 [\gamma_1 \cos \vartheta_1 \pm 1]$$

und für das Hilfsellipsoid

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = C_1 \gamma_1 \eta_1$$

oder

$$\varrho = C_1 \gamma_1 \cos \vartheta_1.$$

Diese letzte Gleichung stellt eine Kugel dar, die durch das Transformationszentrum geht und deren Radius $\frac{1}{2} C_1 \gamma_1$ ist. Ihr Mittelpunkt liegt auf der Rotationsachse des Ovaloids. Die Dichtigkeit der einfachen Belegung und das Moment der Doppelbelegung ergeben sich aus den entsprechenden Werten des I. Falles, wenn wir dort $\beta_1^2 = 0$ setzen. Ebenfalls ist die Masse des gegebenen Ovaloids gleich der Masse der einfachen Belegung.

Für den **III. Fall: $y_0 > e$, d. h. $\beta_1^2 < 0$** (Fig. 7) ist in den Formeln des I. Falles überall $-\beta_1^2$ an Stelle von $+\beta_1^2$ zu setzen. Das Hilfsellipsoid [1]) geht dann in ein abgeplattetes Rotationsellipsoid über.

Die Ergebnisse der drei Fälle lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Die Wirkung des homogenen Ovaloids auf äußere Punkte, dessen Begrenzungsfläche aus einem zweischaligen Rotationshyperboloid durch Inversion von einem inneren Achsenpunkt hervorgeht, kann man durch die Wirkung eines verlängerten Rotationsellipsoids, einer Kugel oder eines abgeplatteten Rotationsellipsoids ersetzen, je nachdem $y_0 \lessgtr e$ ist. In jedem Falle liegt die Hilfsfläche ganz innerhalb des Ovaloids und weist eine einfache Massenbelegung und eine gewisse Art von Doppelbelegung auf; die Masse der einfachen Belegung ist gleich der Masse des gegebenen Ovaloids.

Besitzt der Mittelpunkt des Grundhyperboloids in bezug auf das Transformationszentrum die Koordinaten $0, -y_0, 0$ und ist $y_0 < b$, d. h. ist das Transformationszentrum ein äußerer vom Mittelpunkt verschiedener Punkt der positiven Achse, so ist die Gleichung des Rotationshyperboloids

$$\frac{(Y+y_0)^2}{b^2} - \frac{X^2+Z^2}{a^2} = 1.$$

[1]) s. Abh. II S. 391.

Durch Inversion entsteht daraus die Gleichung des Ovaloids in rechtwinkligen Koordinaten

$$\frac{R^4 b^2}{b^2 - y_0^2}\left[\frac{y_1^2}{b^2 - y_0^2} - \frac{x_1^2 + z_1^2}{a^2}\right] = \left[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{R^2 y_0 y_1}{b^2 - y_0^2}\right]^2,$$

die mittels der Formeln (II) S. 1 in

$$r_1 = \bar{C}\left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 \pm \sqrt{\bar{\beta}\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]^{1)}$$

übergeht. Darin sind

$$(1) \qquad \bar{C} = \frac{R^2 b}{a\sqrt{b^2 - y_0^2}}; \quad \bar{\gamma} = \frac{a\, y_0}{b\sqrt{b^2 - y_0^2}}; \quad \bar{\beta}^2 = \frac{a^2 + b^2 - y_0^2}{b^2 - y_0^2} > 1,$$

und es ist $\bar{\gamma}^2 < \beta^2$. Die Grenzfläche des Ovaloids ist so gestaltet, daß der Radiusvektor diese nur einmal schneidet, solange ϑ_1 den Ungleichungen $0 \leq \vartheta_1 < \Theta_1$ und $\Theta_1 < \vartheta_1 \leq \pi$ genügt. Ist dagegen $\Theta_1 < \vartheta_1 \leq \Theta_2$, so trifft der Radiusvektor die Fläche zweimal. Zwischen ϑ_1 und Θ_2 gilt das Gleichheitszeichen insofern, als hier die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Für die Integration, durch die wir alle Punkte des Ovaloids erhalten, ergeben sich also drei Teilgebiete. Die Veränderliche φ_1 variiert für alle Teile von 0 bis 2π. Im ersten Teilgebiet ist ϑ_1 von 0 bis Θ_1, im dritten Θ_1 bis π zu nehmen, während r_1 für diese beiden von 0 bis $\bar{r}_1$ geht. Das zweite Teilgebiet, das sich unmittelbar an das erste anschließt, ergibt sich durch Integration nach ϑ_1 von Θ_1 bis Θ_2 und nach r_1 von $\bar{\varrho}_1$ bis $\bar{r}_1$, wenn letztere folgende Ausdrücke bezeichnen:

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{r} = \bar{C}\left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right], \\ \bar{\varrho} = \bar{C}\left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 - \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]. \end{cases}$$

Die Grenzwinkel Θ_1 und Θ_1 ergeben $\bar{\varrho}_1 = 0$ bezw. $\bar{r}_1 = 0$, d. h.

$$\Theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - \bar{\gamma}^2}}\right); \quad \Theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{\bar{\beta}^2 - \bar{\gamma}^2}}\right) = \pi - \Theta_1;$$

denn es müssen diese Winkel den Ungleichungen $0 < \Theta_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < \Theta_1 < \pi$ genügen. Ist dagegen $\vartheta_1 = \Theta_2$, so ist $\bar{r}_1 = \bar{\varrho}_1$, d. h.

$$\Theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{\bar{\beta}}\right);$$

[1]) s. Fig. 8—10.

Es kommt hier nur das positive Zeichen des Argumentes in Betracht, da $\Theta_2 < \frac{\pi}{2}$ ist.

Berücksichtigen wir jetzt in der Potentialformel (V) die drei erwähnten Teilgebiete für die Integration nach den Veränderlichen ϑ_1 und r_1, so ist die Integration nach r_1 ausführbar. Ersetzen wir dann $\bar{r}_1$ und $\bar{\varrho}_1$ durch die unter (2) gegebenen Ausdrücke, so erhalten wir für das Potential

$$(3) \qquad V = 2\pi\,\bar{C}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{C}^n\, P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \cdot \bar{J}_n.$$

Das Integral $\bar{J}_n$ ist von der Form

$$\begin{aligned}
\bar{J}_n = {} & \frac{1}{n+3} \int_0^{\Theta_1} \left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]^{n+3} \cdot P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \\
& + \frac{1}{n+3} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left\{\left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]^{n+3} \right. \\
& \qquad \left. - \left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 - \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]^{n+3}\right\} P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \\
& + \frac{1}{n+3} \int_{\pi-\Theta_1}^{\pi} \left[\bar{\gamma}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\bar{\beta}^2\cos^2\vartheta_1 - 1}\right]^{n+3} P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1.
\end{aligned}$$

Führen wir im dritten Summanden die Veränderliche $\vartheta'_1 = \pi - \vartheta_1$ ein, so lassen sich das erste und dritte Integral zu einem einzigen vereinigen, dessen Integrand mit dem des zweiten übereinstimmt. Zufolge der Beziehung $\Theta_1 < \Theta_2$ und der Substitution $x = \cos\vartheta_1$ geht $\bar{J}_n$ über in:

$$\bar{J}_n = \frac{1}{n+3} \int_{\frac{1}{\bar{\beta}}}^{1} \left\{\left[\bar{\gamma}x + \sqrt{\bar{\beta}^2x^2 - 1}\right]^{n+3} - \left[\bar{\gamma}x - \sqrt{\bar{\beta}^2x^2 - 1}\right]^{n+3}\right\} P_n(x)\, dx.$$

Auf dieses Integral wenden wir die gleichen Umformungen an, wie sie Abh. II. S. 370/74 und, da $\bar{\gamma}^2 < \bar{\beta}^2$ ist, S. 376, 4 durchgeführt sind, denen gemäß

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned}
\bar{J}_n = {} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\bar{\beta}}}^{1} \sqrt{\bar{\beta}^2x^2 - 1}^{\,3} \left[(\bar{\beta}^2 - \bar{\gamma}^2)\,(n+1)\,\lambda^n \right. \\
& \left. + (2n+6)\,\bar{\gamma}\,\lambda^{n+1} + \frac{3\bar{\gamma}\,\lambda^{n+1}}{\bar{\beta}^2x^2 - 1}\right] dx
\end{aligned}\right.$$

wird, wenn

$$\lambda = \bar{\gamma}\, x^2 + x\sqrt{\bar{\beta}^2 - \bar{\gamma}^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \cos\varphi$$

ist. Hieran schließen sich nun dieselben Betrachtungen, wie sie in Abschnitt I S. 10—12 angestellt worden sind. Es ergeben sich bei Einführung der sphärischen Polarkoordinaten u, v die drei Fälle

$$\widehat{ND} \gtreqless \widehat{NA}, \text{ d. h. } \alpha \gtreqless \bar{\Theta}_2,^{1})$$

wenn $2\,\Theta_2 = \bar{\Theta}_2$ gesetzt wird. $\bar{\Theta}_2$ und α genügen den Gleichungen

$$(5)^{*}\text{a)}\quad \bar{\Theta}_2 = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - y_0^2}{b^2 + a^2 - y_0^2}\right);\quad \text{b)}\quad \alpha = \arccos\left(\frac{a\, y_0}{b\sqrt{b^2 + a^2 - y_0^2}}\right),$$

die denen S. 13 entsprechen. Wir gelangen auf Grund ähnlicher Überlegungen zu einer quadratischen Gleichung für y_0^2, die als ausgezeichnete Lage des Inversionszentrums den Wert

$$y_0 = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

ergibt. Den Lagen des Poles D der sphärischen Polarkoordinaten u, v entsprechen somit die drei Lagen des Inversionszentrums

$$y_0 \gtreqless \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}},\ \text{d. h. } \alpha \gtreqless \Theta_2.$$

Von einer genauen Durchführung der Untersuchung der drei Fälle soll hier abgesehen werden, da wir, der Methode des I. Abschnittes § 2 folgend, zu einem ganz analogen Resultat gelangen. —

Fällt das Transformationszentrum mit dem Mittelpunkt des Ausgangshyperboloids zusammen, so gehen die Größen $\bar{C}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$ über in

$$\bar{C} = \frac{R^2}{a};\quad \bar{\gamma} = 0;\quad \bar{\beta}^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2},$$

und die Gleichung des Ovaloids nimmt die Form an

$$(1)\qquad \bar{r}_1 = \bar{C}\sqrt{\bar{\beta}^2 \cos^2\vartheta_1 - 1}\,.$$

Der Radiusvektor schneidet die Fläche, die aus zwei symmetrischen Teilen besteht, nur einmal. Wir erhalten sämtliche Punkte des

---

[1]) Die sphärischen Dreiecke sind die gleichen wie zu I § 2, nur ist Θ_2 durch $\bar{\Theta}_2$ zu ersetzen.

Ovaloids, wenn wir φ_1 von 0 bis 2π, r_1 von 0 bis $\bar{r}_1$ und ϑ_1 einmal von 0 bis Θ_1 und dann von $\pi - \Theta_1$ bis π variieren lassen. Der Winkel Θ_1 ist gleich dem Winkel des Asymptotenkegels des Rotationshyperboloids:

$$\Theta_1 = \arccos \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Das Integral J_n ergibt sich bei Berücksichtigung von (1) zu

$$\bar{J}_n = \frac{1}{n+3} \int_0^{\Theta_1} \sqrt{\bar{\beta}^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}^{n+3} \cdot P_n(\cos \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1$$

$$+ \frac{1}{n+3} \int_{\pi-\Theta_1}^{\pi} \sqrt{\bar{\beta}^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}^{n+3} \cdot P_n(\cos \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1,$$

das mittels der Substitution $x = \cos \vartheta_1$ bezw. $x = \cos(\pi - \vartheta_1)$ in

$$\bar{J}_n = \frac{1}{n+3} \int_{\frac{1}{\bar{\beta}}}^{1} \sqrt{\bar{\beta}^2 x^2 - 1}^{n+3} P_n(x) \, dx + \frac{(-1)^n}{n+3} \int_{\frac{1}{\bar{\beta}}}^{1} \sqrt{\bar{\beta}^2 x^2 - 1}^{n+3} P_n(x) \, dx$$

übergeht. Die beiden Summanden addieren sich für gerades n und vereinigen sich zu Null für ungerades n. Es ist also

$$\bar{J}_{2n} = \frac{2}{2n+3} \int_{\frac{1}{\bar{\beta}}}^{1} \sqrt{\bar{\beta}^2 x^2 - 1}^{2n+3} P_{2n}(x) \, dx \tag{2}$$

und damit

$$V = 2\pi \, \bar{C}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{C}^{2n} \, P_{2n}(\cos \vartheta)}{r^{2n+1}} \bar{J}_{2n}. \tag{3}$$

Zur Lösung des Problems sind zwei Wege möglich: Wir können das Integral bezüglich $P_{2n}(x)$ mit Hilfe der Formel (a) S. 23 Abh. I umformen oder nach der bisher benutzten allgemeinen Methode behandeln. In beiden Fällen gelangen wir zu ein und demselben Ausdruck für $\bar{J}_{2n}$, an den sich dann die Einführung der sphärischen Koordinaten auf der Einheitskugel und damit der neuen Polarkoordinaten u, v schließt, wie es S. 10 des näheren ausgeführt ist. Wir wählen hier den zweiten Weg, indem wir an die

Gleichung (4) S. 31 anknüpfen. In dieser ist $\gamma = 0$ zu nehmen und n durch $2n$ zu ersetzen; dann wird

$$\bar{J}_{2n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}^2} \frac{2n+1}{2\pi} \bar{\beta}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\bar{\beta}}^{1} \sqrt{\bar{\beta}^2 x^2 - 1}^{3} \lambda^{2n} \, dx,$$

das wegen

$\lambda = \bar{\beta} x \sqrt{1 - x^2} \cdot \cos\varphi$, $x = \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2)$, d. h. wegen $\lambda = \frac{\bar{\beta}}{2} \sin\vartheta_2 \cos\varphi$ die Form annimmt

$$(4) \quad \left\{ \bar{J}_{2n} = \frac{2}{3} \cdot (2n+1) \frac{\bar{\beta}^{2n}}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\bar{\Theta}_2} \frac{\sqrt{\frac{\bar{\beta}^2 - 2}{4} + \frac{\bar{\beta}^2}{4} \cos\vartheta_2}^{3}}{\sqrt{1 + \cos\vartheta_2}} \right.$$
$$\left. \cdot \sin^{2n}\vartheta_2 \cos^{2n}\varphi \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2. \right.$$

In diesem Falle ist die Integration nach φ und ϑ_2 wieder über eine Kappe der Einheitskugel zu erstrecken, aber ϑ_2 ist Seite eines rechtseitigen sphärischen Dreiecks; denn wegen $\bar{\gamma} = 0$ ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wir können somit setzen:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{a)} \ \cos u = \sin\vartheta_2 \cos\varphi; & \text{b)} \ \cos\vartheta_2 = \sin u \cos v; \\ \text{c)} \ \cos v = \dfrac{\cos\vartheta_2}{\sin u}. \end{cases}$$

Der Grenzwert von ϑ_2 ist

$$\bar{\Theta}_2 = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right).$$

Ist also $b \gtrless a$, so wird $\bar{\Theta}_2 \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ sein. Und da $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, so ergeben sich wieder drei verschiedene Fälle für die Lage des Poles D der Polarkoordinaten u, v; und zwar kann D außerhalb oder auf der Kugelkappe in A oder zwischen N und A liegen. Aus $b \gtrless a$ folgt weiterhin, daß diese Lagen des Poles D durch die Gestalt des der Transformation zugrunde gelegten zweischaligen Rotationshyperboloides bedingt sind. Je nachdem wir also als Ausgangsfläche ein gemeines Hyperboloid $b \gtrless a$ oder ein gleichseitiges haben, müssen wir unterscheiden

I. Fall: $b > a$, d. h. $\bar{\Theta}_2 < \frac{\pi}{2}$, bezw. $\widehat{NA} < \widehat{ND}$.

II. Fall: $b = a$, d. h. $\bar{\Theta}_2 = \frac{\pi}{2}$, bezw. $\widehat{NA} = \widehat{ND}$.

III. Fall: $b < a$, d. h. $\bar{\Theta}_2 > \frac{\pi}{2}$, bezw. $\widehat{NA} > \widehat{ND}$.[1])

Für die Polarkoordinaten u, v geht (4) abgesehen von den Grenzen über in

$$\bar{J}_{2n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\bar{\beta}^{2n}}{2^{2n}} (2n+1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{\sqrt{\frac{\bar{\beta}^2 - 2}{4} + \frac{\bar{\beta}^2}{4} \sin u \cos v}^3}{\sqrt{1 + \sin u \cos v}} \cdot \cos^{2n} u \sin u \, du \, dv.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in (3) und unter Berücksichtigung der Hilfsformel (II) Abh. I S. 23 wird:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \int\int \frac{\sqrt{\frac{\bar{\beta}^2 - 2}{4} + \frac{\bar{\beta}^2}{4} \sin u \cos v}^3}{\sqrt{1 + \sin u \cos v}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \bar{C}^n \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^n \cos^n u \, P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) \bar{C}^n \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^n \cos^n u \, P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} \right] \sin u \, du \, dv.$$

Es ist nun

$$(7\,a) \quad \sin u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \bar{C}^n \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^n \cos^n u \, P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} = - \frac{\partial \frac{\cos u}{E_1}}{\partial u}.$$

$$(7\,b) \quad \sin u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) \bar{C}^n \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^n \cos^n u \, P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} = - \frac{\partial \frac{\cos u}{E_1}}{\partial u}.$$

Dabei ist E_1 die Entfernung des Aufpunktes $P(r, \vartheta, \varphi)$ von einem Punkte Q_1 der Rotationsachse, dessen Abstand vom Inversionszentrum $\eta_1 = \frac{1}{2} \bar{C} \bar{\beta} \cos u$ ist; und E_2 ist die Entfernung desselben Aufpunktes von einem Punkte Q_2, dessen Abstand vom Inversionszentrum $\eta_2 = -\frac{1}{2} \bar{C} \bar{\beta} \cos u = -\eta_1$ ist.

Wir betrachten zunächst den **III. Fall: $b < a$, d. h. $\Theta_2 > \frac{\pi}{2}$ bezw. $\widehat{NA} > \widehat{ND}$.**[2]) Dafür variiert u von 0 bis $u_0 = \Theta_2 - \frac{\pi}{2}$ und

[1]) s. Fig. 11a, 12a, 13a. [2]) s. Fig. 11.

von u_0 bis $u_1 = \Theta_2 + \frac{\pi}{2}$. Solange $0 \leq u < u_0$ ist, geht v von $-\pi$ bis $+\pi$; wächst u bis zum Werte u_1, so variiert v zwischen $-v_1$ und $+v_1$. Dabei ist

$$v_1 = \arccos\left(\frac{\cos\Theta_2}{\sin u}\right).$$

Zufolge (7a) und (7b) und dieser Grenzen nimmt (6) die Form an

$$(8)\quad \left\{ V = -\int_0^{u_0} f(\sin u)\left[\partial\frac{\cos u}{\partial u}\frac{E_1}{} + \partial\frac{\cos u}{\partial u}\frac{E_2}{}\right] du - \int_{u_0}^{u_1} f_1(\sin u)\left[\frac{\partial\frac{\cos u}{E_1}}{\partial u} + \frac{\partial\frac{\cos u}{E_2}}{\partial u}\right] du, \right.$$

wenn gesetzt wird

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a)}\ f(\sin u) = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\frac{\beta^2-2}{4} + \frac{\beta^2}{4}\sin u\cos v}^3}{\sqrt{1+\sin u\cos v}}\, dv; \\ \text{b)}\ f_1(\sin u) = \frac{2}{3}\int_0^{v_1} \frac{\sqrt{\frac{\beta^2-2}{4} + \frac{\beta^2}{4}\sin u\cos v}^3}{\sqrt{1+\sin u\cos v}}\, dv. \end{array} \right.$$

Auf Gleichung (8) wenden wir teilweise Integration an und beachten, daß $f_1(\sin u_0) = f(\sin u_0)$ ist, da in $f_1(\sin u)$ $v_1 = \pi$ wird für $u = u_0$ und außerdem der Integrand selber Null wird in jeder der Funktionen. Es wird ferner $f_1(\sin u_1) = 0$, da $(v_1)_{u=u_1} = 0$ ist. Für $f(0)$ ergibt sich

$$f(0) = \frac{\pi}{4\cdot 3}\sqrt{\beta^2-2}^3.$$

Das Potential wird somit

$$V = \frac{\pi}{4\cdot 3}\sqrt{\beta^2-2}^3\cdot\left[\frac{1}{E'_1} + \frac{1}{E'_2}\right] - \left[\int_0^{u_0}\frac{\cos u}{E_1}\cdot\frac{df(\sin u)}{du}\,du + \int_{u_0}^{u_1}\frac{\cos u}{E_1}\cdot\frac{df_1(\sin u)}{du}\,du\right] + \left[\int_0^{u_1}\frac{\cos u}{E_2}\cdot\frac{df(\sin u)}{du}\,du + \int_{u_0}^{u_1}\frac{\cos u}{E_2}\cdot\frac{df_1(\sin u)}{du}\,du\right].$$

Darin sind E'_1 und E'_2 die Entfernungen des Aufpunktes $P(r, \vartheta, \varphi)$ von den Achsenpunkten Q'_1 und Q'_2, deren Abstände vom Transformationszentrum $\eta'_1 = \frac{1}{2} C \beta$ bezw. $\eta'_2 = -\frac{1}{2} C \beta$ sind. E_1 und E_2 aber sind die Entfernungen des Aufpunktes von den Punkten Q_1 und Q_2 der Strecken, deren Punkte den Gleichungen $\eta_1 = \frac{1}{2} C \beta \cos u$ und $\eta_2 = -\frac{1}{2} C \beta \cos u$ genügen. Die Endpunkte Q'_1 und Q''_1 der einen Strecke liegen um $\eta'_1 = \frac{1}{2} C \beta$ und $\eta''_1 = \frac{1}{2} C \beta \cos u_1 = -\frac{1}{2} C \beta \sin \Theta_2$ von Θ entfernt, die der Strecke $Q'_2 Q''_2$ um $\eta'_2 = -\frac{1}{2} C \beta$ und $\eta''_2 = \frac{1}{2} C \beta \sin \Theta_2$.

Im **II. Fall: $b = a$, d. h. $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$ bezw. $\widehat{NA} = \widehat{ND}$** (Fig. 12) sind die Grenzen für u: 0 und π, während v von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ variiert. Gleichung (6) wird unter Berücksichtigung von (7 a) und (7 b) die Form annehmen

$$V = -\int_0^{\pi} \varphi(\sin u) \left(\frac{\partial \frac{\cos u}{E_1}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{\cos u}{E_2}}{\partial u} \right) d u;$$

$\varphi(\sin u)$ ist bis auf die obere Grenze $\frac{\pi}{2}$ mit $f(\sin u)$ identisch. Bei der einmaligen teilweisen Integration verschwindet wegen

$$[\varphi(\sin u)]_{u=0} = [\varphi(\sin u)]_{u=\pi}$$

das von der Integration freie Glied; es bleibt somit

$$V = \int_0^{\pi} \cos u \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \frac{d \varphi(\sin u)}{d u} d u,$$

d. h. V ist das Potential einer doppelt zu rechnenden Strecke, deren Punkte den Gleichungen $\eta_1 = \frac{1}{2} C \beta \cos u$, $\eta_2 = -\frac{1}{2} C \beta \cos u$ genügen, wenn u von 0 bis π variiert.

Für den **I. Fall: $b > a$, d. h. $\Theta_2 < \frac{\pi}{2}$ bezw. $\widehat{NA} < \widehat{ND}$** (Fig. 13) variiert die Veränderliche u von $u' = \frac{\pi}{2} - \Theta_2$ bis $u'' = \frac{\pi}{2} + \Theta_2$ und v von $-v_1$ bis $+v_1$. Die Gleichung (6) in Verbindung mit (7 a), (7 b) und die Anwendung teilweiser Integration ergibt den Ausdruck:

$$V = \int_{u'}^{u''} \cos u \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \frac{d \varphi_1(\sin u)}{d u} d u,$$

da das von der Integration freie Glied zu Null wird; denn die Grenzen u' und u'' bringen die die Funktion $\varphi_1(\sin u)$ zum Verschwinden. $\varphi_1(\sin u)$ ist mit $f_1(\sin u)$ identisch. Wir können somit V als das Potential einer doppelt zu rechnenden Strecke ansehen, deren Punkte die Gleichungen $\eta_1 = \frac{1}{2} C_1 \beta \cos u$ und $\eta_2 = -\frac{1}{2} C \beta \cos u$ erfüllen, wenn u von u' bis u'' variiert.

Diese drei Fälle für $y_0 = 0$ ergeben das Hauptresultat:

Entsteht das Ovaloid durch Inversion aus einem zweischaligen Rotationshyperboloid vom Mittelpunkt aus, so ist das Potential dieses mit Masse von konstanter Dichtigkeit erfüllten Ovaloids ersetzbar durch das Potential zweier Massenpunkte, in denen je eine bestimmte Masse konzentriert ist, vermehrt um das Potential der sie verbindenden Strecke, deren Mittelstück doppelt zu rechnen ist, und deren Massenbelegung verschiedene Dichtigkeit aufweist, wenn $b < a$ ist. Sobald $b = a$ oder $b > a$ ist, können wir das Potential in jedem Falle durch dasjenige einer doppelt zu rechnenden Strecke ersetzen. Die Dichtigkeit der Belegung ergibt sich aus einem Vergleich der entsprechenden Gleichungen für das Potential mit der allgemeinen Formel des Linienpotentials.

§ 2. Das Grundhyperboloid ist ein einschaliges Rotationshyperboloid (Fig. 14, 15).

Das einschalige Rotationshyperboloid

$$\frac{X^2 + Z^2}{a^2} - \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

geht durch Inversion von einem Achsenpunkt in das Ovaloid über

$$(1) \quad \frac{b^2 R^4}{y_0^2 + b^2}\left[\frac{x_1^2 + z_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{y_0^2 + b^2}\right] = \left[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{R^2 y_0 y_1}{y_0^2 + b^2}\right]^2,$$

oder in Polarkoordinaten

$$(2) \quad r_1 = C_2\left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 \pm \sqrt{1 - \beta_2^2 \cos^2\vartheta_1}\right],$$

und daraus

$$\bar{r}_1 = C_2\left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 + \sqrt{1 - \beta_2^2 \cos^2\vartheta_1}\right],$$
$$\bar{\varrho}_1 = C_2\left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 - \sqrt{1 - \beta_2^2 \cos^2\vartheta_1}\right].$$

Dabei bedeuten C_2, γ_2, $\beta_2{}^2$ folgende Ausdrücke:

$$C_2 = \frac{b R^2}{a\sqrt{y_0{}^2 + b^2}}; \quad \gamma_2 = \frac{a y_0}{b\sqrt{y_0{}^2 + b^2}}; \quad \beta_2{}^2 = \frac{y_0{}^2 + a^2 + b^2}{y_0{}^2 + b^2} > 1.$$

Die Fläche des Ovaloids wird vom Radiusvektor in zwei Punkten geschnitten, solange ϑ_1 die Ungleichung $\Theta < \vartheta_1 < \Theta_1$ befriedigt. Wächst der Winkel ϑ_1 bis zu einem Wert Θ_2, so ergibt sich nur ein Schnittpunkt mit der Fläche. Für $\vartheta_1 = \Theta$ wird $\bar{r}_1 = \varrho_1$, d. h.

$$\sqrt{1 - \beta_2{}^2 \cos^2 \Theta} = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta = \arccos\left(\frac{1}{\beta_2}\right),$$

da $\Theta < \frac{\pi}{2}$ ist. Ferner wird $\bar{\varrho}_1 = 0$ für $\vartheta_1 = \Theta_1$ und $\bar{r}_1 = 0$ für $\vartheta_1 = \Theta_2$, d. h.

$$\Theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2}}\right) \text{ und } \Theta_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2}}\right) = \pi - \Theta_1.$$

Die Gesamtheit der Punkte des Ovaloids ergibt sich somit, wenn wir φ_1 von 0 bis 2π gehen lassen, und ϑ_1 einmal von Θ bis Θ_1 und dann von Θ_1 bis $\pi - \Theta_1$ variieren, während r_1 von $\bar{\varrho}_1$ bis $\bar{r}_1$ bezw. 0 bis $\bar{r}_1$ zu nehmen ist.

Die Potentialformel (V) ergibt

$$V = 2\pi\, C_2{}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2{}^n\, P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}\, J''_n,$$

und darin ist

$$J''_n = \frac{1}{n+3} \int_{\Theta}^{\Theta_1} \left\{\left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 + \sqrt{1 - \beta_2{}^2 \cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3} - \left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 - \sqrt{1 - \beta_2{}^2 \cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3}\right\} P_n(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1$$

$$+ \frac{1}{n+3} \int_{\Theta_1}^{\pi - \Theta_1} \left[\gamma_2 \cos\vartheta_1 + \sqrt{1 - \beta_2{}^2 \cos^2\vartheta_1}\right]^{n+3} P_n(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1.$$

Die Zerlegung des zweiten Integrals in zwei Teilintegrale mit den Grenzen Θ_1 und $\frac{\pi}{2}$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ und $\pi - \Theta_1$ und die Einführung der Veränderlichen $\vartheta'_1 = \pi - \vartheta_1$ in dem letzteren führen zu einem Integral, dessen Grenzen Θ_1 und $\frac{\pi}{2}$ sind und dessen Integrand mit dem des ersten Integrals in J''_n übereinstimmt. Eine

Vereinigung der jetzigen Summanden und die Substitution $x = \cos\vartheta_1$ liefern den Ausdruck

$$J''_n = \frac{1}{n+3}\int_0^{\bar{\beta}} \{[\gamma_2 x + \sqrt{1-\beta_2{}^2 x^2}]^{n+3} - [\gamma_2 x - \sqrt{1-\beta_2{}^2 x^2}]^{n+3}\} P_n(x)\, dx,$$

der nun gemäß der Methode Abh. II S. 370—75 umzuformen ist; es ist danach

$$J''_n = \frac{2}{3}\frac{(n+2)}{2}\frac{(n+1)}{2}\int_0^{\bar{\beta}} \sqrt{1-\beta_2{}^2 x^2}\, F''\, dx$$

$$F'' = \frac{\gamma_2{}^2 + \beta_2{}^2}{\beta_2{}^2} \sum_{k=0}^{\cdot} (-1)^k A_k\, x^{2n-2k} (1-x^2)^k \cdot (\gamma_2{}^2 + \beta_2{}^2)^k \cdot \gamma_2{}^{n-2k}.$$

Infolge der Substitution (7) und (7 a) S. 375 Abh. II erhalten wir schließlich

$$J''_n = \frac{2}{3}\int_{\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}\vartheta_1\, P_n(\cos\vartheta_2)\, \sqrt{\gamma_2{}^2 + \beta_2{}^2 \sin^2\vartheta_1}\, [3\psi(\cos\vartheta_1) + 2n\,\psi_1(\cos\vartheta_1)] \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1,$$ [1])

wobei ϑ_2 als ein reeller Winkel, der der Ungleichung

$$\arccos\left(\frac{y_0}{\sqrt{y_0{}^2 + a^2 + b^2}}\right) \leqq \vartheta_2 \leqq \frac{\pi}{2}$$

genügt, definiert ist.

Das Potential des Ovaloids würde, wenn man J''_n nach Gleichung (5) in (3) einsetzt, die Formel (IV) S. 3, den Ausdruck für $\cos\Gamma_1$ S. 5, darin β_2 durch $-\beta_2{}^2$ ersetzt, beachtet und die Summe der Integrale durch das Integral der Summe ersetzt, die Form haben

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} V = 2C_2{}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta_1\, \psi(\cos\vartheta_1)\, \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1}{E} \\ \qquad + \frac{4}{3} C_2{}^3 \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \int_{\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta_1\, \psi_1(\cos\vartheta_1) \cdot C_2 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial C_2} \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1, \end{array}\right.$$

[1]) Bezüglich $\psi(\cos\vartheta_1)$ und $\psi_1(\cos\vartheta_1)$ und $\cos\vartheta_2$ vgl. Abh. II S. 376.

wobei

$$(7\,a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2^n P_n(\cos \Gamma_1) \cos^n \vartheta_1 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_1}^n}{r^{n+1}} = S = \frac{1}{E}$$

$$(7\,b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n C_2^n P_n(\cos \Gamma_1) \cos^n \vartheta_1 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_1}^n}{r^{n+1}} = S' = C_2 \cdot \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial C_2}$$

ist, d. h. (7 a) stellt gemäß Formel (III) den Wert einer reziproken Entfernung dar; daraus folgt

$$E^2 = r^2 + C_2^2 \cos^2 \vartheta_1 (\gamma_2^2 + \beta_2^2 \sin^2 \vartheta_1) - 2 r C_2 \left[\cos \vartheta \cdot \gamma_2 \cos^2 \vartheta_1 + \sin \vartheta \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2 \sin \vartheta_1} \cos \vartheta_1 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi)\right]$$

und analog zu Seite 6 erhält man

$$(7)\quad \begin{cases} \xi_1 = C_2 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1; & \eta_1 = C_2 \gamma_2 \cos^2 \vartheta_1; \\ \zeta_1 = C_2 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2} \cdot \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \end{cases}$$

als Koordinaten eines Punktes Q_1, dessen Entfernung vom Aufpunkt $P(r, \vartheta, \varphi)$ gleich E ist und der der Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit den Halbachsen $\frac{1}{2} C_2 \gamma_2$ und $\frac{1}{2} C_2 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2}$ angehört; denn durch Elimination von ϑ_1 und φ_1 aus den Gleichungen (7) ergibt sich

$$(8)\quad \frac{\xi_1^2 + \zeta_1^2}{\left(\frac{1}{2} C_2 \sqrt{\gamma_2^2 + \beta_2^2}\right)^2} + \frac{(\eta_1 - \frac{1}{2} C_2 \gamma_2)^2}{(\frac{1}{2} C_2 \gamma_2)^2} = 1.$$

Die Brennlinie des Ellipsoids ist ein Kreis mit dem Radius $e' = \frac{1}{2} C_2 \beta_2$. Dieser liegt in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene im Abstand $\frac{1}{2} C_2 \gamma_2$ vom Transformationszentrum. Die Koordinaten der Punkte, in denen die Brennlinie jede Achse ξ_1, ζ_1 schneidet, sind für F: $\frac{1}{2} C_2 \gamma_2$, $\frac{1}{2} C_2 \beta_2$; für F_1: $\frac{1}{2} C_2 \gamma_2$, $-\frac{1}{2} C_2 \beta_2$. Die kleine Achse des Ellipsoids fällt mit der Rotationsachse y_1 des Ovaloids zusammen. Ferner liegt das Ellipsoid ganz auf der positiven Seite des Systems, so daß der eine Scheitel der kleinen Achse mit dem Transformationszentrum identisch ist. Wir können somit in der Potentialformel (6) die Integration nach ϑ_1 und φ_1 auffassen als eine solche über den Teil des Hilfsellipsoids (8), der in dem Winkelraum Θ bis $\frac{\pi}{2}$ liegt. Die Integration ergibt die Ellipsoidoberfläche mit Ausnahme des Teiles, der durch einen von O ausgehenden Kegel mit dem Öffnungswinkel $\Theta = \arccos\left(\frac{1}{\beta_2}\right)$

herausgeschnitten wird. Das Oberflächenelement des Hilfsellipsoids ist

$$(9) \qquad do = C_2^2 \sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2} \cdot \sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2 \cos^2(2\vartheta_1)} \cdot \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 .^1)$$

Bezeichnen wir die beiden Summanden in (6) mit V_I und V_{II}, so läßt sich V_I zufolge der allgemeinen Formel des Flächenpotentials und zufolge des Oberflächenelementes (9) als das Potential der oben definierten Hilfsfläche deuten, wenn diese einfach mit Masse von der Dichtigkeit

$$(10) \qquad k = \frac{2\, C_2 \cos\vartheta_1 \, \psi(\cos\vartheta_1)}{\sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2} \cdot \sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2 \cos^2(2\vartheta_1)}}$$

belegt ist. Zur Deutung des Summanden V_{II} benutzen wir die Methode Abh. II S. 394/95, die zu der Formel

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (W' + W) = U = \int\int \mu C \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial C} \cdot do$$

führt. U ist dann das Potential einer auf gewisse Art doppelt mit Masse belegten Fläche. Das Moment der Doppelbelegung ist μC. Wie ein Vergleich von U mit dem zweiten Summanden in (6) zeigt, läßt sich dieser als das Potential der Hilfsfläche deuten, wenn diese doppelt mit Masse belegt ist. Die bei der Doppelbelegung in Betracht kommenden Flächen sind Teile ähnlicher Ellipsoide, die einen Scheitel gemeinsam, aber verschiedene Mittelpunkte haben. Das Moment der Doppelbelegung ergibt sich zufolge (9) als

$$(11) \qquad \mu = \frac{4}{3} \frac{C_2^2 \cos\vartheta_1 \, \psi_1(\cos\vartheta_1)}{\sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2} \cdot \sqrt{\gamma_2^2+\beta_2^2 \cos^2(2\vartheta_1)}} .$$

Ferner läßt sich auch hier leicht nachweisen, daß die Masse M_1 der Hilfsfläche bei einfacher Belegung gleich der Gesamtmasse des gegebenen Ovaloids ist; es ist

$$(11\,a) \qquad M = M_1 = 2\pi C_2^3 J'_0 = \frac{\pi^2 C_2^3}{4 \cdot \beta_2^3} (\gamma_2^2 + \beta_2^2).$$

Auf Grund der vorangehenden Untersuchungen erhalten wir als Ergebnis:

Die Wirkung, welche die von der Fläche

$$r_1 = C_2 [\gamma_2 \cos\vartheta_1 \pm \sqrt{1-\beta_2^2 \cos^2\vartheta_1}]$$

---

[1]) Bd. II S. 3—5.

begrenzte homogene Masse von der Dichtigkeit eins auf äußere Punkte ausübt, läßt sich ersetzen durch die Wirkung der Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, aus der durch einen vom Inversionszentrum ausgehenden Kegel ein Teil herausgeschnitten wird.[1]) *Die Fläche ist einfach mit Masse von der Dichtigkeit k (Gl. 10) und auf eine gewisse Art doppelt mit Masse belegt. Das Moment der Doppelbelegung ist durch (11) gegeben.*

Geht das Ovaloid durch Inversion aus einem einschaligen Rotationshyperboloid, für das $y_0 = 0$, d. h. der Mittelpunkt Inversionszentrum ist, hervor, so ist in den Formeln des allgemeinen Falles $\gamma_2 = 0$ zu setzen. Das Hilfsellipsoid (8) kann dann angesehen werden als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der Rotationsachse Null, d. h. wir erhalten einen ebenen doppelt überdeckten Kreis, dessen Radius $\bar{\varrho} = \frac{1}{2} C_2 \beta_2$, d. i. die große Halbachse des Ellipsoids, und dessen Mittelpunkt das Inversionszentrum ist. Andererseits genügen nach den Gleichungen (7) die Punkte dieser Kreisfläche der Gleichung

$$\varrho = [\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}]_{\gamma_2 = 0} = C_2 \beta_2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1,$$

woraus $\bar{\varrho}$ für $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ folgt. Da nun je nach der Gestalt des Ausgangshyperboloids

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \gtreqless \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ d. h. } \Theta = \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right) \gtreqless \frac{\pi}{4}$$

sein kann, so wird die Ausführung der Integration in der Potentialformel (6) drei verschiedene Fälle ergeben: Für $\vartheta < \frac{\pi}{4}$ besteht die Hilfsfläche aus einem einfach überdeckten Kreis mit dem Radius $\varrho_1 = \frac{1}{2} C_2 \beta_2 \sin(2\Theta)$ und einem sich unmittelbar anschließenden doppelt überdeckten Kreisring, dessen Punkte die Gleichung $\varrho'_1 = \frac{1}{2} C_2 \beta_2 \sin(2\vartheta_1)$ erfüllen, wenn ϑ_1 von Θ bis $\frac{\pi}{4}$ geht. In den Fällen $\Theta = \frac{\pi}{4}$ und $\Theta > \frac{\pi}{4}$ liefert die Ausführung der Integration jedesmal einen einfach überdeckten Kreis, dessen Radius $\varrho_2 = \frac{1}{2} C_2 \beta_2$ bezw. $\varrho_3 = \frac{1}{2} C_2 \beta_2 \sin(2\Theta)$ ist.[2])

[1]) Die Fläche, die sich durch die Integration ergibt, braucht nicht innerhalb des Ovaloids zu liegen. Sie kann auch je nach der Größe von a, b, y_0 teils außerhalb, teils innerhalb liegen.

[2]) Fig. 15 stellt den 3. Fall dar. Dabei ist die Kreisfläche hier in Perspektive gezeichnet worden.

Ferner lassen sich die beiden Summanden V_I und V_{II} auch hier dahin deuten, daß die Hilfsflächen in jedem Falle einfach und auf gewisse Art doppelt mit Masse belegt sind. Das bei der Deutung von V_{II} im allgemeinen Fall auftretende zweite Hilfsellipsoid, das dem ersten [Gl. (8)] ähnlich ist, geht hier in Kreise bezw. in einen Kreis und Kreisring über, die zu den Kreisflächen konzentrisch sind und in derselben Ebene liegen. Die Dichtigkeit der einfachen Belegung und das Moment der Doppelbelegung folgen in jedem Falle aus Gl. (10) und (11) für $\gamma_2 = 0$. Die Masse der einfachen Belegung ist gleich der Masse des gegebenen Ovaloids; und zwar ist

$$M = \frac{\pi^2 C_2^3}{4\beta_2},$$

wie aus (11a) folgt.

Für $y_0 = 0$ können wir somit das Resultat aufstellen:

Das Potential des homogenen Ovaloids

$$\bar{r}_1 = C_2 \sqrt{1 - \beta_2^2 \cos^2 \vartheta_1}$$

ist ersetzbar durch das Potential einer einfach überdeckten Kreisfläche, vermehrt um dasjenige eines doppelt überdeckten Kreisringes, solange $\Theta < \frac{\pi}{4}$ *ist. Falls aber* $\Theta = \frac{\pi}{4}$ *oder* $\Theta > \frac{\pi}{4}$ *ist, läßt sich das Potential in jedem Falle durch dasjenige einer einfach überdeckten Kreisfläche ersetzen. Die Hilfsflächen weisen in allen drei Fällen eine einfache und eine gewisse Art von Doppelbelegung auf; die Masse der einfachen Belegung ist gleich der Masse des gegebenen Ovaloids.*

Die geometrische Ableitung dieses Ergebnisses erhalten wir aus dem allgemeinen Fall (Fig. 14), wenn die Rotationsachse des abgeplatteten Rotationsellipsoids zum Verschwinden gebracht wird. Je nachdem der dort auftretende Kegel einen Öffnungswinkel $\leqq \frac{\pi}{4}$ hat, werden sich die obigen drei Fälle ergeben.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Wangerin und Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer für die Anregung der Arbeit und für die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung auch an dieser Stelle ergebenst zu danken.

Lebenslauf.

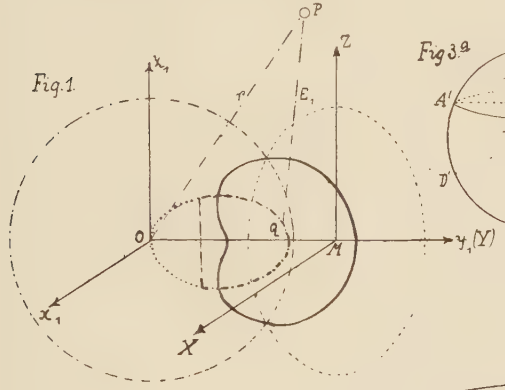
Am 12. Oktober 1892 wurde ich, Elisabeth Maria Kumm, als Tochter des Provinzial-Taubstummenlehrers Arthur Kumm und seiner Frau Anna geb. Krisp, zu Marienburg W.-Pr. geboren. Ich bin katholischen Bekenntnisses und preußischer Staatsangehörigkeit. Von Ostern 1901 bis 1910 besuchte ich die höhere Mädchenschule (Lyzeum) meiner Heimatstadt und trat dann in das Oberlyzeum der Mariensehule zu Danzig ein. Ostern 1913 bestand ich die Reifeprüfung, 1914 die Lehramtsprüfung und erwarb Herbst 1918 durch eine Ergänzungsprüfung an der Oberrealschule St. Peter und Paul zu Danzig das Reifezeugnis. Seit Ostern 1914 studierte ich an der Technischen Hochschule Danzig und den Universitäten Berlin und Halle: Mathematik, Physik und Pädagogik. Im W.-S. 1920/21 bestand ich in Halle das Staatsexamen.

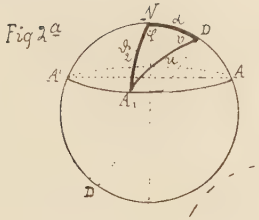
Meine Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten: in Danzig: Eggert, Kalähne, Krüger, von Mangoldt, Ruff, Schilling, Sommer, von Wolff; in Berlin: Dessoir, Erdmann, Frobenius, Knopp, Merz, Nernst, Penck, Planck, Riehl, Rothe, F. J. Schmidt, Schwarz, Troeltsch, Warburg, von Wilamowitz-Möllendorf; in Halle: Frischeisen-Köhler, Grammel, Gutzmer, Menzer, F. K. Schmidt, Tubandt, Waetzoldt, Wangerin, Ziehen.

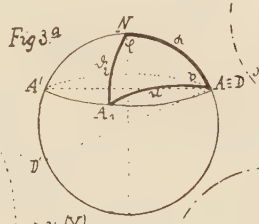
Allen meinen verehrten Lehrern bin ich zu dauerndem Danke verpflichtet. Insbesondere wird mir das Wohlwollen und das liebenswürdige Interesse, das Herr Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer, dessen Assistentin ich seit Ostern bin, meinem Arbeiten während meiner Hallenser Studienzeit entgegenbrachte, in steter, dankbarster Erinnerung bleiben.

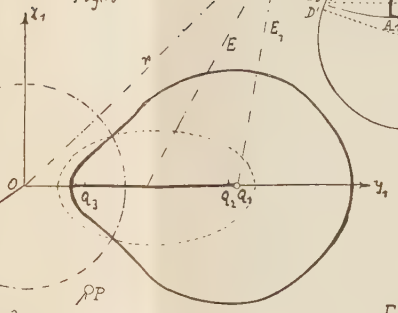
Tafel I.

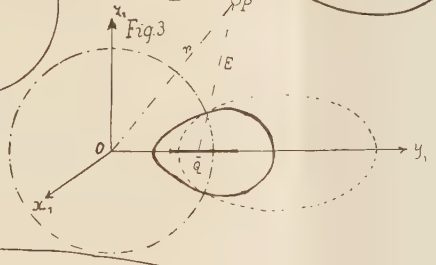
——— Achsen
------ Meridianschnitt der Ausgangsfläche.
..... " " " " Transformationskugel.
——— " " " des Ovaloids.
-·-·- " " " der Hilfsfläche
——— Hilfsstrecke.
----- Entfernungen des Aufpunktes

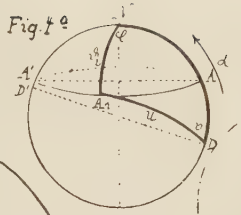


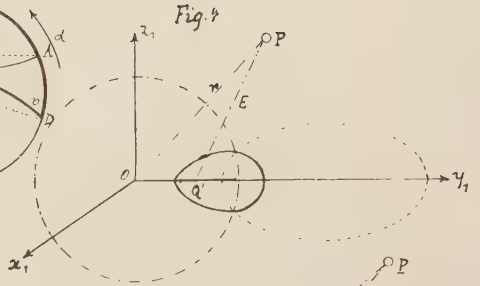


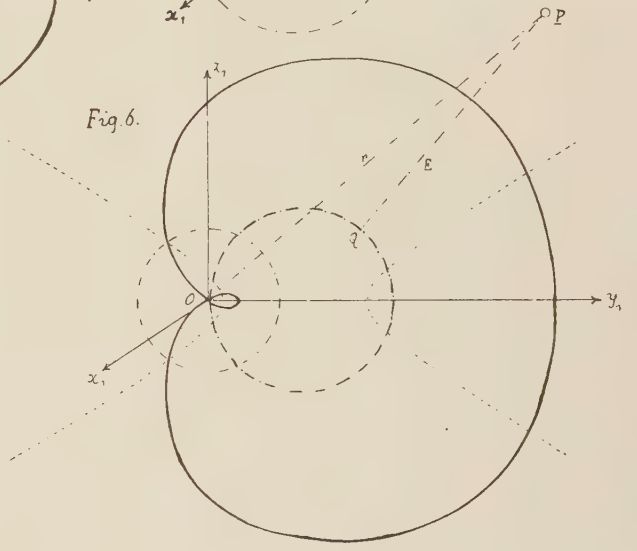


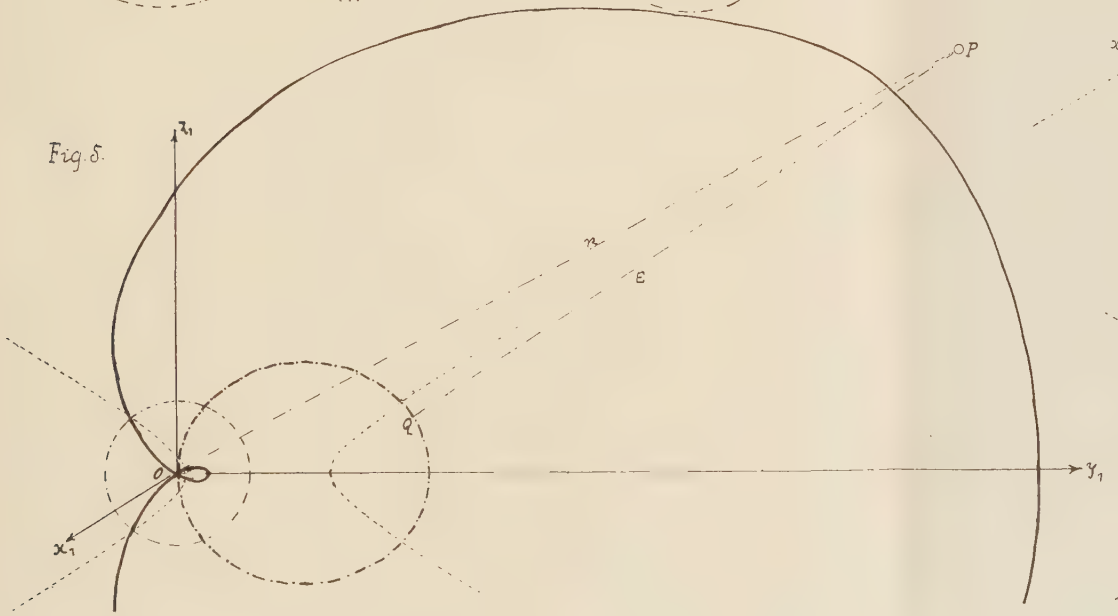


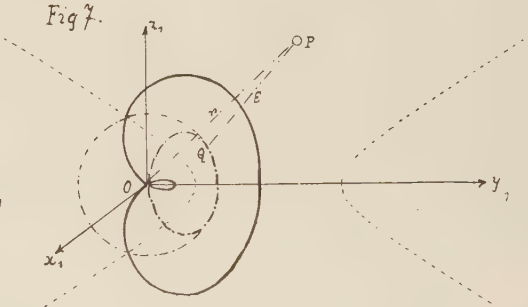












Tafel II

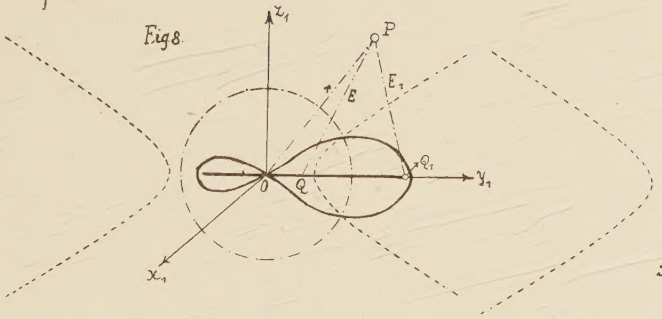


Fig 8.
z1
P
r
E
E1
Q1
O
Q
y1
x1

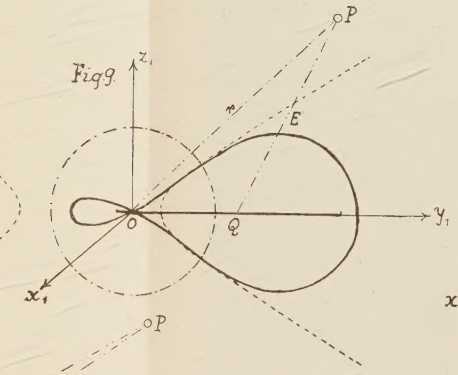


Fig 9.
z1
P
r
E
O
Q
y1
x1

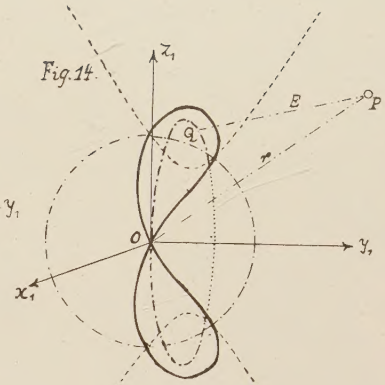


Fig. 14.
z1
E
P
Q1
r
O
y1
x1

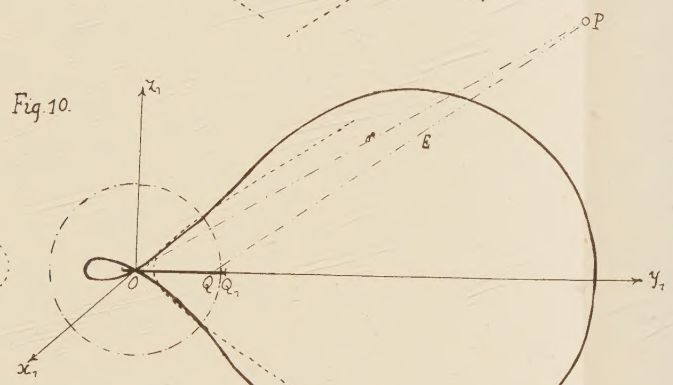


Fig. 10.
P
z1
r
E
O
Q
Q1
y1
x1

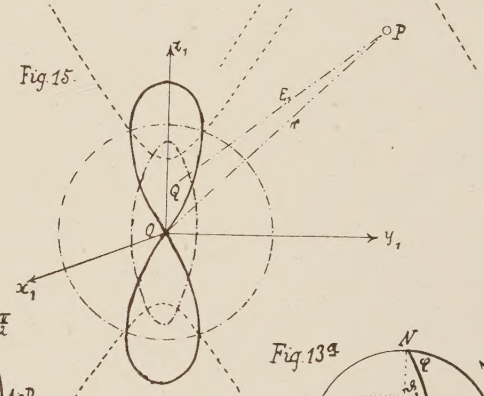


Fig. 15.
z1
P
E1
r
Q
O
y1
x1

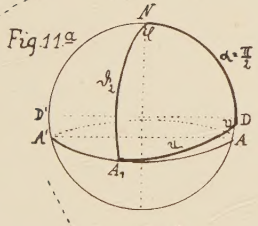


Fig. 11a.
N
α=π/2
D'
D
A'
A
A1

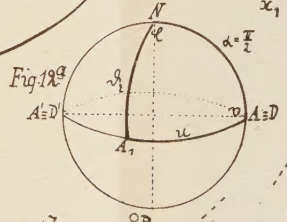


Fig. 12a.
N
α=π/2
A'≡D'
A≡D
A1

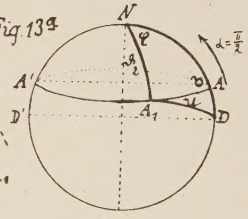


Fig. 13a.
N
α=π/2
A'
A
D'
D
A1

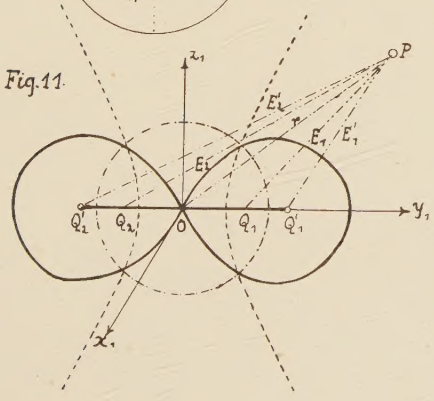


Fig. 11.
z1
P
E'1
r
E1
E'1
Q'2
Q2
O
Q1
Q'1
y1
x1

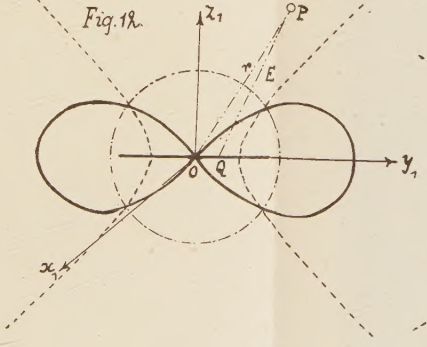


Fig. 12.
z1
P
r
E
O
Q
y1
x1

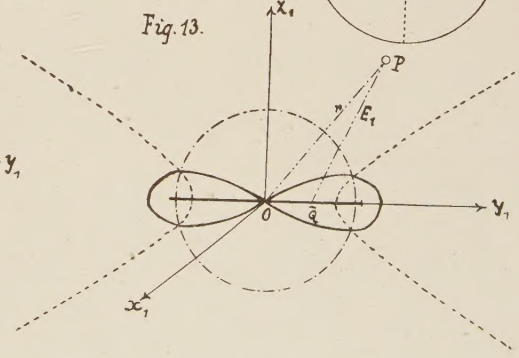


Fig. 13.
x1
P
r
E1
O
Q
y1
x1